

Modelado y Simulación de un Oscilador Electrónico de Bloqueo

Rafael Vázquez Valenzuela

Proyecto de Fin de Carrera

Octubre 1999

Índice general

I	Introducción	5
II	Modelado	11
1.	Ecuaciones del Oscilador de Bloqueo	13
1.1.	Circuito del OB	13
1.2.	Ecuaciones del OB en variables naturales	17
1.2.1.	Simplificación de las ecuaciones	20
1.2.2.	Hipótesis de relajación	22
1.2.3.	Estudio de las ecuaciones del OB por zonas. Aplicación de la hipótesis de relajación.	25
1.3.	Planos y rectas notables.	44
1.3.1.	Posición relativa de los equilibrios de corte y saturación	48
2.	Comportamiento global del OB	53
2.1.	Aplicaciones de Poincaré	54
III	Simulación	81
3.	Elección de los parámetros	85
4.	Simulaciones realizadas	91
4.1.	Comportamiento normal del OB	91
4.2.	Otros comportamientos del OB	94
4.2.1.	Caso 2	95
4.2.2.	Caso 3	96
4.3.	Comportamiento no oscilatorio del OB	96

5. Comparación con PSPICE	99
IV Programas para el análisis numérico del OB	101
6. Metodología de programación	105
6.1. Eliminación de ecuaciones	105
6.2. Resolución de sistemas de e.d.o. lineales	107
7. Estructura de programación	113
7.1. datos.m	114
7.2. matrices.m	115
7.3. eqauto.m	118
7.4. elim.m	119
7.5. comp.m	122
7.6. rectas.m	123
7.7. evolucion.m	125
7.8. trayect.m	127
7.9. cambio.m	130
7.10. poincare.m	131
7.11. gamma1.m, gamma2.m	133
7.12. puntot.m	133
7.13. resolver.m	135
7.14. blocking.m	135

Parte I

Introducción

Frente al uso habitual de aproximaciones lineales en el estudio de problemas en ingeniería, es cada vez más patente la necesidad de recurrir a modelos no lineales para dar una explicación rigurosa de la complejidad dinámica que presentan los sistemas físicos y en concreto electrónicos, en la práctica. En este sentido, el análisis de sistemas no lineales ha recibido un fuerte impulso en los últimos decenios gracias, entre otras disciplinas, a la consolidación de la moderna teoría geométrica y de bifurcaciones de sistemas dinámicos.

Cuando los fenómenos que se consideran tienen carácter local, las aproximaciones polinómicas a las características no lineales suelen dar excelentes resultados; además, se dispone ya de un elenco de herramientas propias de la dinámica diferenciable que permite alcanzar dichos resultados con relativa comodidad.

En cuanto a los fenómenos de carácter global, el estado actual de cosas es menos satisfactorio. Por un lado, se trata de problemas de la mayor dificultad computacional. Casi siempre se necesita recurrir al uso combinado de técnicas analíticas y numéricas que permitan dar el salto de lo local a lo global. Por otra parte, las aproximaciones polinómicas de las no linealidades presentes en el modelo suelen ser de mala calidad desde el punto de vista global: en especial, cuando hay que considerar sistemas que tienen zonas de funcionamiento claramente diferenciadas (p.e. sistemas electrónicos con una zona activa y zonas de corte, sistemas de control con saturación o con limitaciones en los actuadores, etc.)

El modelado mediante sistemas lineales a trozos puede considerarse como una alternativa que da solución en parte a las dificultades antes mencionadas. Por un lado, en el análisis de estos sistemas, la distinción entre los fenómenos locales y globales se difumina y, si bien las dificultades computacionales no disminuyen apreciablemente, se consigue comprender mejor la dinámica global, que resulta de la consideración conjunta de sistemas lineales (cuya dinámica es perfectamente conocida). Recientemente se han conseguido excelentes resultados en el análisis de estos sistemas, como se puede ver en [6], [7] o en [8], y concretamente en su aplicación al estudio de osciladores electrónicos, como se puede ver en [4].

Este trabajo se ocupa del modelado y simulación de un Oscilador electrónico de Bloqueo, de ahora en adelante OB. Se trata de un circuito empleado en radioelectrónica para generar pulsos cortos de tensión aunque tiene otras aplicaciones prácticas, entre las que se pueden destacar las siguientes:

- Empleo como oscilador patrón para suministrar pulsos de disparo al

sistema de sincronización de ondas tipo pulsos (ondas cuadradas, etc...)

- Generación de pulsos de gran potencia de pico. Por supuesto, la potencia media es pequeña, puesto que el ciclo de trabajo es bajo.
- Empleando un arrollamiento terciario, pueden obtenerse pulsos de las dos polaridades, según que se conecte a masa uno u otro de los terminales del arrollamiento.
- Se puede utilizar como divisor de frecuencia o contador.
- Empleo como interruptor de baja impedancia para descargar rápidamente un condensador.
- La salida del OB puede emplearse como onda puerta de muy pequeña razón de separación entre marcas, por ejemplo, en receptores de televisión.

Una explicación más extensa de estas aplicaciones y posibles circuitos prácticos se puede encontrar en [11].

Se pueden encontrar muchas posibles realizaciones prácticas del OB (ver, por ejemplo, [1], [10], [5], o [11]), teniendo todas un funcionamiento similar. Sin embargo, en la mayor parte de los libros en los que se trata este circuito se realiza una simple justificación de su funcionamiento, y sólo en [1] podemos encontrar un análisis matemático claro del modo de funcionamiento del circuito, si bien estudia una versión antigua que emplea una válvula. La intención de este trabajo es realizar un análisis similar, si acaso más detallado, de una versión más moderna del OB, transistorizado.

Todas las realizaciones del OB tienen en común la presencia de un elemento no lineal capaz de amplificar, normalmente una válvula de vacío en las realizaciones más antiguas, o un transistor bipolar en las modernas, y un transformador de pulsos, aparte de un condensador y varias resistencias. El comportamiento del OB suele ser explicado en los libros de electrónica como el de un circuito activo cuya salida es acoplada a su entrada por medio de un transformador de pulsos, de manera que la realimentación es regenerativa y el circuito genera entonces un único pulso (funcionamiento monoestable) o un tren de pulsos (funcionamiento astable).

No obstante, nuestra intención es estudiar el problema desde un punto de vista más matemático, caracterizando al OB como un oscilador de relajación. Para ello es fundamental considerar cierto condensador parásito asociado al

modelo del transistor, que nos permitirá demostrar la presencia de oscilaciones de relajación.

Este tipo de osciladores ha sido ampliamente estudiado y se han encontrado comportamientos de carácter caótico en muchos de ellos (ver [14] y [3]). Métodos para obtener caos en estos sistemas se pueden encontrar en [13] y en [12] empleando funciones con histéresis.

En [15] podemos encontrar un intento de caracterizar un OB caótico, si bien las variaciones introducidas en el circuito provocan excesivas diferencias con el circuito clásico del OB.

Avanzamos brevemente la estructura de este trabajo. El trabajo se divide en una primera parte de modelado, dónde primero se introducen los modelos matemáticos del transformador de pulsos y el transistor que forman parte del circuito del OB. Posteriormente, empleando estos modelos se obtienen unas ecuaciones del circuito que se simplifican para poder obtener la máxima información posible de su análisis. A continuación se introduce la hipótesis de relajación que se va a aplicar a las ecuaciones.

Al haber introducido un modelo lineal a trozos del transistor, las ecuaciones son también lineales a trozos, y se pasa a realizar un estudio en las diferentes zonas lineales del modelo. Después se pasa a caracterizar una serie de planos y rectas que nos servirán para poder contemplar el problema desde una perspectiva geométrica, esencial para su mejor comprensión.

Finalmente pasamos a considerar el problema desde una perspectiva global, para poder predecir el comportamiento del sistema. Para ello se emplea una aplicación de Poincaré, que es estudiada en detalle.

La segunda parte del trabajo consiste en realizar diversas simulaciones para comprobar los resultados predichos en la primera parte. Posteriormente se realizan estas mismas simulaciones en PSPICE para comprobar la fiabilidad de los resultados. Finalmente se extraen diversas conclusiones empleando estos mismos resultados.

Añadimos, para terminar esta sección introductoria, unos comentarios sobre la originalidad y novedad de este trabajo. Salvo en [1], no es posible encontrar explicaciones realmente satisfactorias del comportamiento del OB, y el modelado realizado puede servir de puente para realizar posibles estudios posteriores con mayor profundidad o incluso determinar la posibilidad de encontrar estados caóticos realizando pequeñas modificaciones en el circuito.

Parte II

Modelado

Capítulo 1

Ecuaciones del Oscilador de Bloqueo

En este apartado vamos a obtener las ecuaciones del Oscilador de Bloqueo (de ahora en adelante, OB), para así poder caracterizar su comportamiento dinámico. Como todos los componentes del circuito son lineales, salvo el transistor (BJT) que lo modelamos como lineal a trozos, el modelo resultante del OB es también lineal a trozos, por lo que posteriormente se realiza un análisis de las ecuaciones en las distintas zonas lineales.

Además se realizarán los adecuados cambios de variable para simplificar tanto las ecuaciones del OB como la representación geométricas de las zonas.

1.1. Circuito del OB

El circuito del OB (configuración astable, en emisor común) puede observarse en la figura 1.1.

El condensador C_c que aparece entre colector y emisor del transistor no tiene por qué existir en el circuito real, puesto que los efectos capacitivos parásitos del propio transistor tienen el mismo efecto. En cualquier caso si aparece en el circuito como un condensador real debe tener un valor de capacidad muy bajo como veremos más adelante.

Los componentes del circuito que modelaremos son un transformador de pulsos y el transistor bipolar, cuyos modelos pasaremos a discutir.

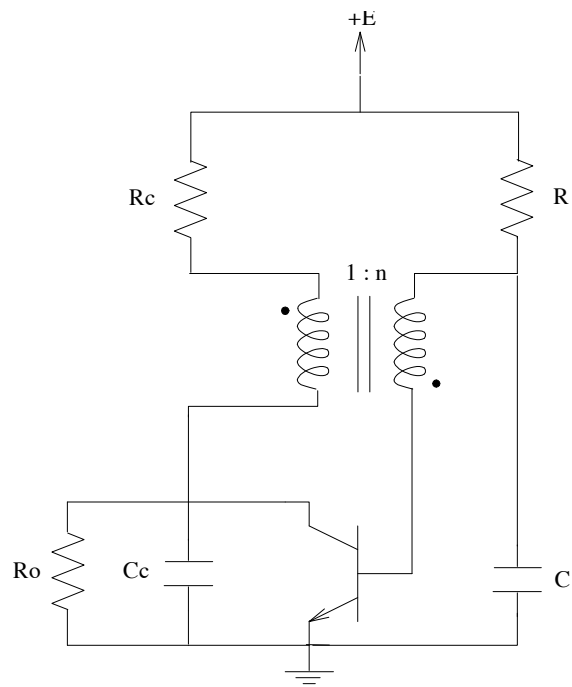


Figura 1.1: Circuito del oscilador de bloqueo.

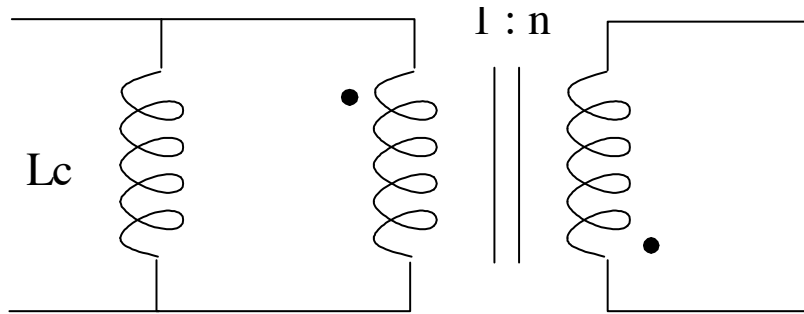


Figura 1.2: Modelo del transformador de pulso

Modelo del transformador de pulsos.

Despreciando las capacidades en paralelo y las inductancias de dispersión, además de la resistencia que presenta el propio bobinado, un modelo bastante aceptable consistirá en una inductancia de magnetización, L , en paralelo con un transformador ideal de relación de transformación n , como podemos observar en la figura 1.2.

Situando la inductancia en la rama del colector del transistor, los valores de los parámetros del modelo serán:

$$L = L_c \quad ; \quad n = \sqrt{\frac{L_b}{L_c}}, \quad (1.1)$$

dónde L_c y L_b representan las inductancias de la rama primaria y secundaria, respectivamente. Para más detalles sobre el modelado de transformadores de pulsos se puede consultar [11].

Modelo del transistor

Para modelar el transistor bipolar se empleará un modelo lineal a trozos, uno de los modelos más sencillos posibles, si bien existen muchos otros más complejos tales como los empleados por el simulador de circuitos PSPICE (ver [2]).

Denominamos i_c e i_b a las intensidades de colector y base, respectivamente, y V_{CE} y V_{BE} a las tensiones de colector y base respecto al emisor, con los sentidos indicados en la figura 1.3.

Suponemos las siguientes dependencias:

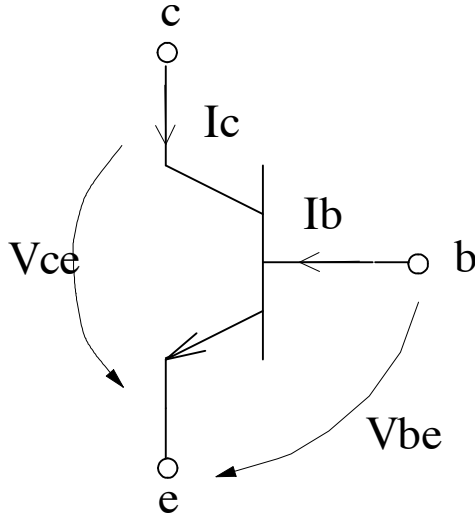


Figura 1.3: Variables del BJT

$$\begin{cases} i_c = f_1(V_{CE}, i_b), \\ i_b = f_2(V_{BE}). \end{cases}$$

Deducimos enseguida que

$$i_c = f_1(V_{CE}, f_2(V_{BE})) = \tilde{f}_1(V_{CE}, V_{BE}).$$

Admitiremos un modelo lineal a trozos para cada intensidad, de una variable en el caso de i_b y de dos variables en el de i_c , es decir,

$$f_2(V_{BE}) = \begin{cases} 0, & V_{BE} < V_\gamma \\ \frac{V_{BE} - V_\gamma}{R_b}, & V_{BE} \geq V_\gamma \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tilde{f}_1(V_{BE}, V_{CE}) = \begin{cases} 0, & V_{BE} < V_\gamma, \text{ o } V_{CE} < 0 \\ \frac{\beta \cdot (V_{BE} - V_\gamma)}{R_b}, & 0 \leq \frac{\beta \cdot (V_{BE} - V_\gamma)}{R_b} < \frac{V_{CE}}{R_{sat}} \\ \frac{V_{CE}}{R_{sat}}, & \frac{\beta \cdot (V_{BE} - V_\gamma)}{R_b} \geq \frac{V_{CE}}{R_{sat}} \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

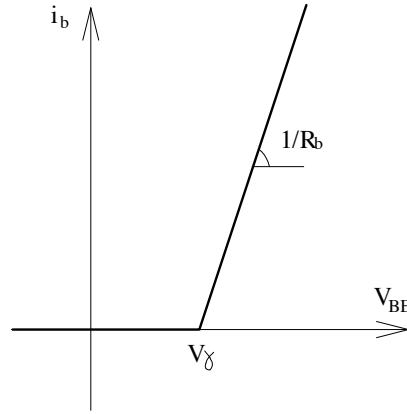


Figura 1.4: Función de la intensidad de base

donde R_b , β , R_{sat} y V_γ son, respectivamente, la resistencia de base del transistor, la ganancia, la resistencia colector-emisor en saturación, y la tensión umbral, parámetros del transistor que consideramos constantes.

Estas funciones lineales a trozos están representadas en las figuras 1.4 y 1.5.

1.2. Ecuaciones del OB en variables naturales

En la figura 1.6 se definen las variables auxiliares que se emplearán para obtener las ecuaciones del circuito.

Así, I es la intensidad que circula por la inductancia de magnetización del transformador de pulsos, $u = V_{CE}$ es la tensión colector-emisor del transistor, $u_b = V_{BE}$ es la tensión base-emisor, i_b e i_c son las intensidades de base y colector respectivamente, v es la tensión en el condensador C , i_{ct} es la intensidad total que circula por la rama izquierda del transformador de pulsos, y C_c es un condensador de muy pequeño valor que aparece entre emisor y colector y que representa una capacidad parásita del transistor bipolar.

Aplicando la primera ley de Kirchoff obtenemos las siguientes ecuaciones:

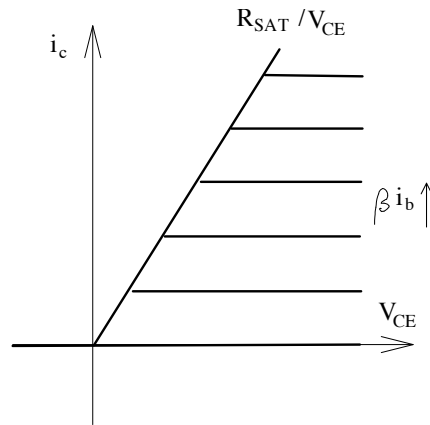


Figura 1.5: Función de la intensidad de colector

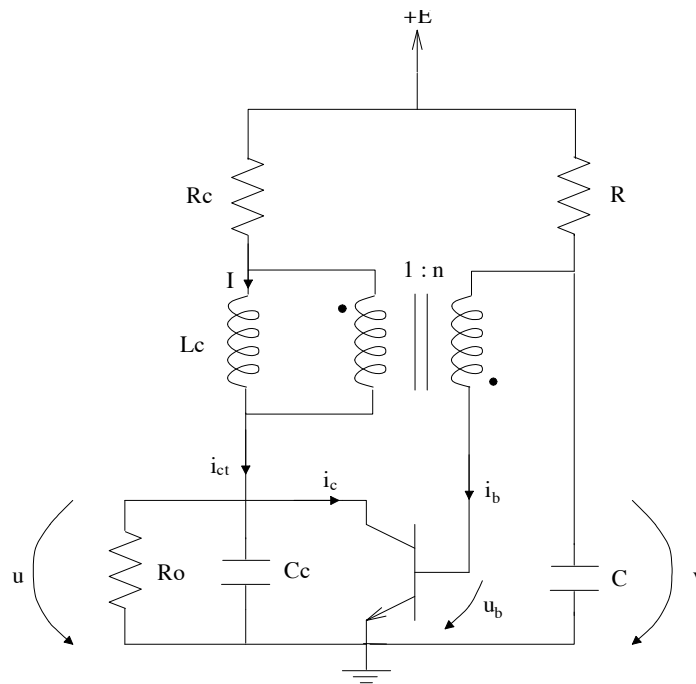


Figura 1.6: Variables del Circuito

$$\begin{cases} E = R \left[i_b(u_b) + C \frac{dv}{dt} \right] + v, \\ u_b = v + Ln \frac{dI}{dt}, \\ E = R_c i_{ct} + L \frac{dI}{dt} + u. \end{cases} \quad (1.4)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff obtenemos:

$$\begin{cases} I = i_{ct} - ni_b(u_b), \\ i_{ct} = i_c(u, u_b) + C_c \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_o}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Eliminando i_{ct} se llega a:

$$\begin{cases} E = Ri_b(u_b) + RC \frac{dv}{dt} + v, \\ u_b = v + Ln \frac{dI}{dt}, \\ E = R_c C_c \frac{du}{dt} + R_c i_c(u, u_b) + L \frac{dI}{dt} + \left(1 + \frac{R_c}{R_o}\right)u, \\ I = i_c(u, u_b) + C_c \frac{du}{dt} - ni_b(u_b) + \frac{u}{R_o}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Es importante en nuestro análisis observar que podemos obtener, combinando adecuadamente las tres últimas ecuaciones de (1.6) una ecuación escalar que nos relaciona las variables entre sí:

$$E = R_c I + R_c ni_b(u_b) + \frac{u_b - v}{n} + u \quad (1.7)$$

Si tomamos entonces la primera, tercera y cuarta ecuación de (1.6) tendremos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} E = Ri_b(u_b) + RC \frac{dv}{dt} + v, \\ E = R_c C_c \frac{du}{dt} + R_c i_c(u, u_b) + L \frac{dI}{dt} + \left(1 + \frac{R_c}{R_o}\right)u, \\ I = i_c(u, u_b) + C_c \frac{du}{dt} - ni_b(u_b) + \frac{u}{R_o}. \end{cases}$$

En este sistema tenemos cuatro variables: u , v , I , y u_b . De estas cuatro, sólo aparecen derivadas de las tres primeras, y además u_b se puede obtener

de ellas a partir de (1.7). Luego estamos ante un sistema de tercer orden. Hay que recordar que según el modelo que estamos usando del transistor, $i_b = f_2(u_b)$ y $i_c = f_1(u, u_b)$, siendo estas funciones lineales a trozos como se describe en (1.2) y (1.3) respectivamente. Como las ecuaciones son lineales, el modelo global del OB también es lineal a trozos.

1.2.1. Simplificación de las ecuaciones

Para simplificar las dependencias introducimos la siguiente variable:

$$w = u_b + R_c n^2 i_b(u_b) \quad (1.8)$$

Este cambio nos permite simplificar la ecuación (1.7) combinando dos variables que son dependientes entre sí en una sola.

Como $i_b = f_2(u_b)$ podemos escribir w como función de u_b :

$$w = f(u_b) = \begin{cases} u_b, & u_b \leq V_\gamma \\ u_b + (u_b - V_\gamma) \frac{n^2 R_c}{R_b}, & u_b > V_\gamma \end{cases}$$

Como esta función es continua y estrictamente creciente, es biyectiva con lo que podemos expresar u_b como función de w , lo que es necesario para poder determinar la dependencia de las intensidades de nuestra nueva variable.

$$u_b = f^{-1}(w) = g(w) = \begin{cases} w, & w \leq V_\gamma \\ \frac{w + V_\gamma \frac{n^2 R_c}{R_b}}{1 + \frac{n^2 R_c}{R_b}}, & w > V_\gamma \end{cases} \quad (1.9)$$

Ahora, las dependencias de las intensidades en el transistor se pueden expresar en función de w :

$$\begin{cases} i_c = \tilde{f}_1(u, g(w)), \\ i_b = f_2(g(w)). \end{cases}$$

Hacemos también el siguiente cambio lineal de variables, que empleamos para eliminar la tensión en el condensador C :

$$y = v - nR_c I \quad (1.10)$$

Aplicando los cambios de variable a la ecuacion (1.7), obtenemos:

$$w = nE - nu + y, \quad (1.11)$$

y por tanto hemos reducido una relación entre cinco variables a una relación entre tres variables, lo que nos permitirá expresar las intensidades, que son función de u y w , como función de u e y , que son las variables que aparecen en las ecuaciones junto con I y v .

Podemos calcular la derivada de y escribiendo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} - nR_c \frac{dI}{dt} = \frac{1}{RC} (E - v - Ri_b) - \frac{nR_c}{L} (E - R_c I - nR_c i_b - u).$$

Además, dado que la intensidad por la bobina I aparece con frecuencia multiplicada por la resistencia R_c introducimos la siguiente variable para poder simplificar un poco más las ecuaciones

$$z = R_c I.$$

Así, las ecuaciones (1.6) quedan:

$$\begin{aligned} RC\dot{v} &= E - v - Ri_b(g(w)), \\ R_c C_c \dot{u} &= z - \frac{R_c}{R_o} u - R_c i_c(u, g(w)) + nR_c i_b(g(w)), \\ \frac{L}{R_c} \dot{z} &= E - z - nR_c i_b(g(w)) - u, \\ \dot{y} &= \frac{1}{RC} (E - v - Ri_b(g(w))) - \\ &\quad - \frac{nR_c}{L} (E - z - nR_c i_b(g(w)) - u), \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde hemos explicitado la dependencia de las intensidades. De estas cuatro ecuaciones podemos prescindir de una de ellas, salvo de la segunda, pues última es combinación lineal de la primera y la tercera.

Las ecuaciones con las que vamos a trabajar serán las (1.12), sustituyendo $g(w)$ por $g(nE - nu + y)$ usando (1.11), y eligiendo tres de las cuatro variables (siempre tiene que estar incluida u) según nos interese en cada zona de funcionamiento.

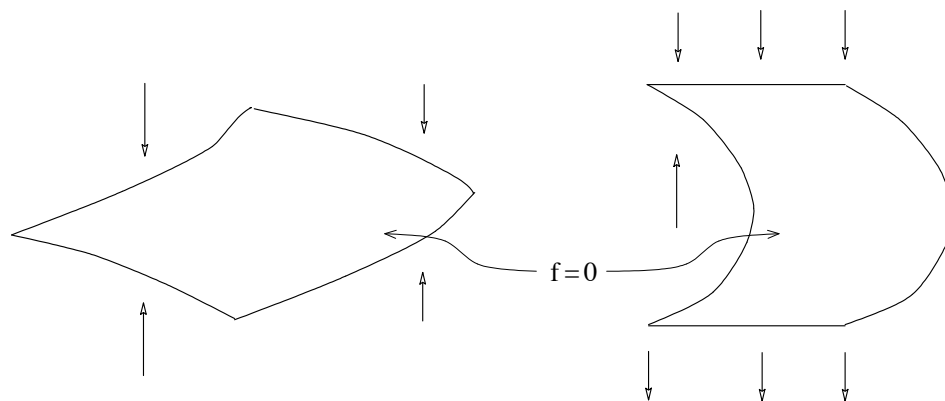


Figura 1.7: Ejemplos de variedades lentas. Las flechas indican el movimiento de acercamiento o alejamiento a la variedad en la dirección del eje x .

1.2.2. Hipótesis de relajación

En nuestro análisis, haremos uso de lo que llamaremos hipótesis de relajación. Para introducir las ideas básicas, supongamos que el sistema que nos encontramos es de la forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= h(x, y, z),\end{aligned}$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$.

Entonces, en primera aproximación, podemos suponer $\varepsilon \approx 0$, y esto nos define una variedad o superficie que denominaremos variedad “lenta” (ver figura 1.7):

$$f(x, y, z) = 0$$

El movimiento sobre la variedad “lenta” lo denominaremos “movimiento lento” y viene definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= h(x, y, z),\end{aligned}$$

junto con

$$x = \varphi(y, z) : f(\varphi(y, z), y, z) = 0.$$

El movimiento exterior a la variedad “lenta” lo llamaremos “movimiento rápido” y viene definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, z), \\ z' &= \varepsilon h(x, y, z), \end{aligned}$$

donde ' denota derivación respecto a la nueva variable (escala rápida de tiempo)

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Teniendo en cuenta que en primera aproximación $\varepsilon \approx 0$, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y_0, z_0), \\ y &= y_0 = cte. \\ z &= z_0 = cte. \end{aligned}$$

Observamos que los puntos de la variedad lenta son equilibrios del movimiento rápido, pues si

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

entonces

$$x' = 0.$$

Podemos clasificar las zonas de la variedad lenta en función de la estabilidad de este equilibrio:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \begin{cases} > 0 & \text{Inestable} \\ < 0 & \text{Estable} \end{cases}$$

Así, las zonas de la variedad lenta quedan clasificadas en repulsivas (equilibrio inestable) y atractivas (equilibrio estable) como, por ejemplo, en la figura 1.8.

Los puntos de la variedad lenta, donde se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) = 0,$$

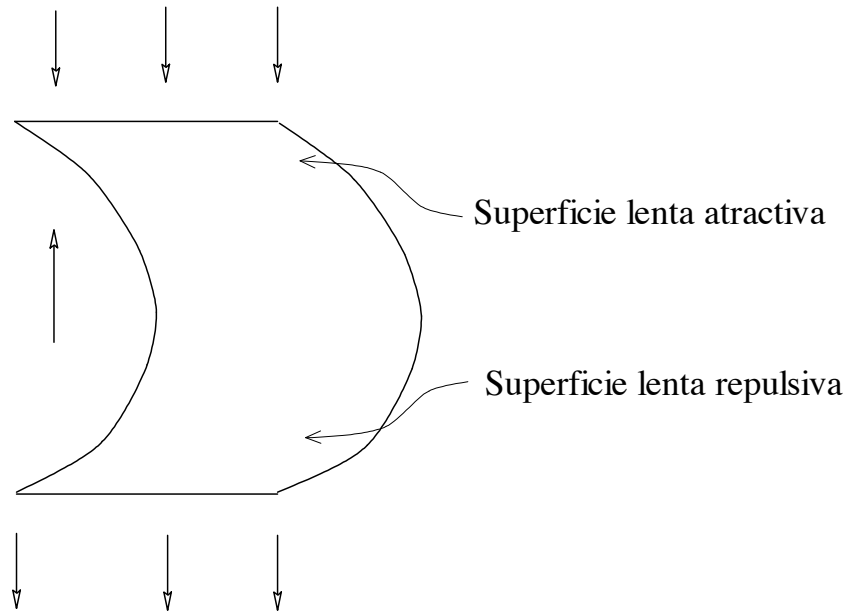


Figura 1.8: Clasificación de zonas de las superficies lentas.

representan los “bordes” de la variedad lenta, donde se producirá el “salto” o “relajación” del movimiento rápido entre los movimientos lentos.

Es decir, un sistema de este tipo se comportará como un sistema de segundo orden con el movimiento confinado en una zona atractiva de la variedad lenta, hasta el instante en el que la trayectoria toque un borde de la variedad y entonces se producirá un movimiento rápido descrito como un sistema de primer orden, hasta que la trayectoria entre en otra zona atractiva de la variedad lenta.

Nuestro sistema no se comportará exactamente así, ya que al ser lineal a trozos tenemos puntos de discontinuidad de la derivada, y será en estos puntos donde se producirá el salto como ya veremos.

Un ejemplo interesante de este tipo de sistemas aparece cuando la variedad lenta es la catástrofe de cúspide (ver figura 1.9).

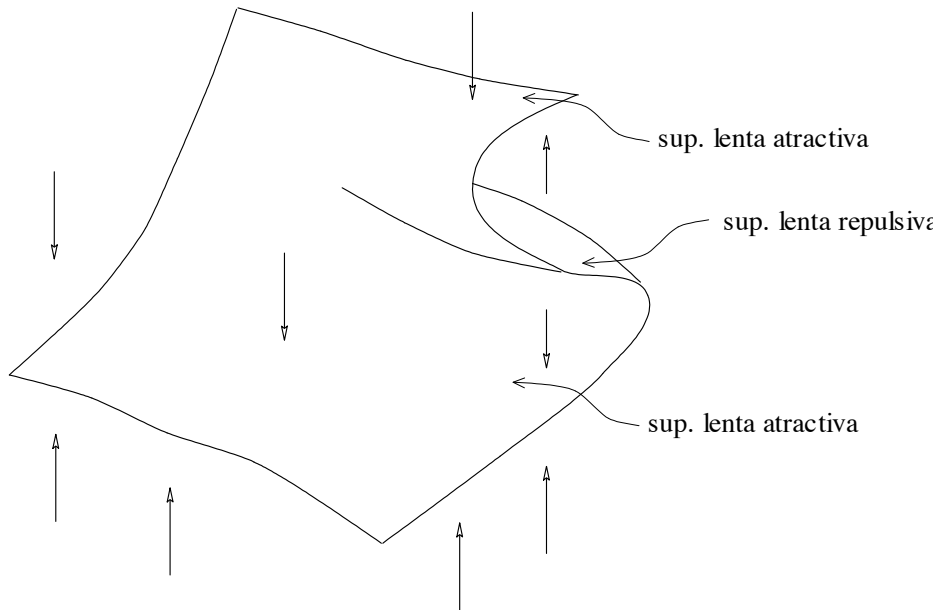


Figura 1.9: Catástrofe de cúspide

1.2.3. Estudio de las ecuaciones del OB por zonas. Aplicación de la hipótesis de relajación.

Nuestro sistema, debido al modelo lineal a trozos que introduce el transistor, queda dividido en tres zonas distintas, siendo lineal en cada una de ellas. Veamos las ecuaciones en cada una de estas zonas.

Región de corte

Esta zona se caracteriza por la no conducción del transistor, con lo que se tiene

$$i_b = i_c = 0.$$

Para escribir con mayor sencillez las ecuaciones, introducimos las siguientes constantes de tiempo:

$$\begin{aligned}\tau &= RC, \\ \tau_l &= \frac{L}{R_c}, \\ \tau_c &= R_c C_c,\end{aligned}$$

y la relación de resistencias

$$r = \frac{R_c}{R_o}.$$

Eligiendo u , y , z como variables de estado, las ecuaciones (1.12) quedan:

$$\begin{aligned}\tau_c \dot{u} &= z - ru \\ \tau \dot{y} &= E\left(1 - n\frac{\tau}{\tau_l}\right) - y + n\frac{\tau}{\tau_l}u - n\left(1 - \frac{\tau}{\tau_l}\right)z \\ \tau_l \dot{z} &= E - u - z\end{aligned} \tag{1.13}$$

Calculemos los equilibrios de nuestro sistema, y encontramos el siguiente único equilibrio:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{E}{1+r}, \\ \bar{z} &= \frac{rE}{1+r}, \\ \bar{y} &= E\left(1 - \frac{nr}{1+r}\right),\end{aligned}$$

a lo que corresponde un valor de

$$\bar{v} = E$$

Aplicaremos ahora la hipótesis de relajación, suponiendo $\tau_c \approx 0$.

Entonces la primera ecuación de (1.13) nos define la variedad lenta, que en este caso será un “plano lento”

$$z = ru$$

Además, en esta zona comprobamos que

$$\frac{\partial}{\partial u}(z - ru) = -r < 0,$$

luego el plano lento es atractivo, y el movimiento será lento.

Proyectando la dinámica en el plano (y, u) e introduciendo la constante

$$s = \frac{\tau}{\tau_l} = \frac{RR_c C}{L},$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau_l \dot{u} &= \frac{E}{r} - \frac{1+r}{r} u, \\ \tau \dot{y} &= E(1 - ns) - y + n(s - r(1 - s))u. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Veamos los autovalores y autovectores del sistema. La correspondiente matriz asociada es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1+r}{r\tau_l} & 0 \\ \frac{n}{\tau} [s - r(1-s)] & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} -\frac{1+r}{r} s & 0 \\ n [s - r(1-s)] & -1 \end{pmatrix},$$

lo que nos dice que los autovalores verifican

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{\tau} \\ \lambda_2 = -\frac{1+r}{r\tau_l} \end{cases}$$

Como los autovalores son reales y negativos, el equilibrio será genéricamente un nodo estable.

Para el cálculo de los autovectores, planteamos primeramente el sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} V_{1u} \\ V_{1y} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+r}{r\tau_l} + \frac{1}{\tau} & 0 \\ \frac{n}{\tau} (s - r(1-s)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1u} \\ V_{1y} \end{pmatrix} = 0,$$

y concluimos que podemos tomar

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para el segundo autovalor, escribimos

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} V_{2u} \\ V_{2y} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{n}{\tau} [s - r(1 - s)] & -\frac{1}{\tau} + \frac{1+r}{r\tau_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{2u} \\ V_{2y} \end{pmatrix} = 0,$$

y llegamos a

$$\left(\frac{n}{\tau} [s - r(1 - s)]\right) V_{2u} + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1+r}{r\tau_l}\right) V_{2y} = 0.$$

Un sencillo cálculo conduce a la ecuación simplificada

$$nV_{2u} + \frac{V_{2y}}{r} = 0,$$

y haciendo $V_{2u} = 1$, tomamos

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -nr \end{pmatrix}.$$

Veamos que ocurre si los autovalores son iguales, es decir, si tenemos un autovalor doble. En dicho caso

$$-\frac{1+r}{r\tau} s = -\frac{1}{\tau},$$

y llegamos a

$$s - r(1 - s) = 0,$$

con lo que la matriz del sistema queda

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix},$$

de manera que el equilibrio es un nodo estrellado estable, siendo todas las direcciones autovectores.

Nos interesa ahora la posición del equilibrio con relación a la frontera de la región. Recordemos que la región de corte está caracterizada por $u_b \leq V_\gamma$ o, de (1.9), llegamos a $w \leq V_\gamma$, que equivale recordando (1.11) a

$$nE - nu + y \leq V_\gamma$$

Concluimos que la condición para estar en la región de corte en las nuevas variables es

$$u \geq E + \frac{y - V_\gamma}{n}.$$

Como tenemos para el equilibrio que calculamos previamente que

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{E}{1+r}, \\ \bar{y} = E \left(1 - \frac{nr}{1+r}\right), \end{cases}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} E + \frac{\bar{y} - V_\gamma}{n} &= E + \frac{E \left(1 - \frac{nr}{1+r}\right) - V_\gamma}{n} = \\ &= E \left(1 - \frac{r}{1+r}\right) + \frac{E - V_\gamma}{n} = \frac{E}{1+r} + \frac{E - V_\gamma}{n} = \\ &= \bar{u} + \underbrace{\frac{E - V_\gamma}{n}}_{\substack{> \\ \vee \\ 0}} > \bar{u}. \end{aligned}$$

Deducimos, pues, que

$$\bar{u} < E + \frac{\bar{y} - V_\gamma}{n}$$

y que el equilibrio no está contenido en la región de corte. Como este equilibrio es un nodo estable, forzosamente la trayectoria en algún momento dado saldrá de la región de corte.

Tenemos el sistema completamente caracterizado en esta zona y resumimos la información de este apartado en la figura 1.10.

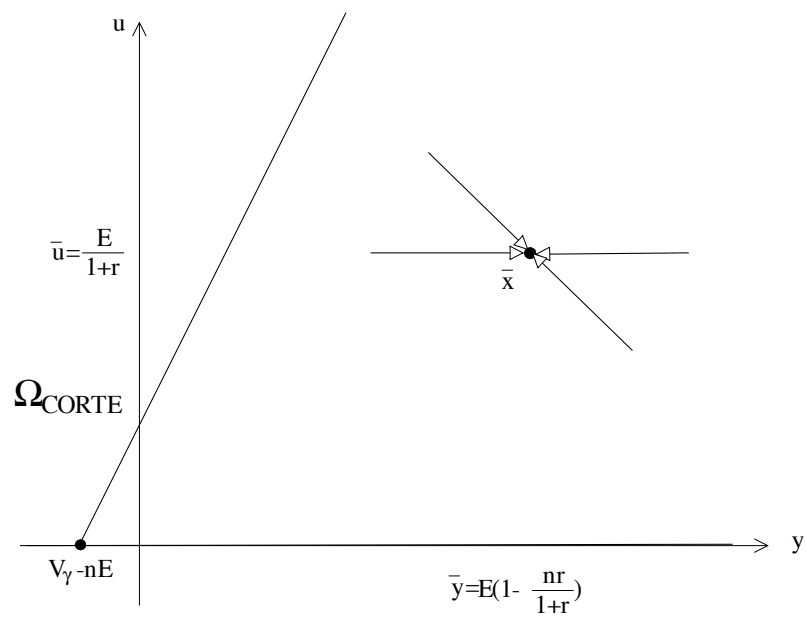


Figura 1.10: El equilibrio que gobierna la dinámica del sistema en corte está fuera de dicha región y se indican las rectas invariantes de los autovectores.

Región Activa

Esta región del espacio esta caracterizada por las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \geq 0, \\ u < E + \frac{y - V_\gamma}{n}, \\ \frac{u}{R_{sat}} > \beta \frac{u_b - V_\gamma}{R_b}, \end{array} \right.$$

y teniendo en cuenta que

$$u_b = g(w) \quad \underset{u_b \geq V_\gamma}{=} \frac{w + V_\gamma \frac{n^2 R_c}{R_b}}{1 + \frac{n^2 R_c}{R_b}} \quad \underset{w = nE - nu + y}{=} \frac{nE - nu + y + V_\gamma \frac{n^2 R_c}{R_b}}{1 + \frac{n^2 R_c}{R_b}},$$

la última desigualdad que caracteriza la región activa queda como sigue

$$\frac{u}{R_{sat}} > \beta \frac{\frac{nE - nu + y + V_\gamma \frac{n^2 R_c}{R_b}}{1 + \frac{n^2 R_c}{R_b}} - V_\gamma}{R_b} = \beta \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c},$$

o equivalentemente

$$u \left(\frac{R_b + n^2 R_c}{\beta R_{sat}} + n \right) > y + nE - V_\gamma = n \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right).$$

Si introducimos la constante

$$k = \frac{1}{1 + \frac{R_b + n^2 R_c}{n\beta R_{sat}}} < 1,$$

la condición queda

$$u > k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right).$$

En resumen, la región queda definida en las nuevas variables por las siguientes desigualdades

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ u < E + \frac{y - V_\gamma}{n}, \\ u > k\left(E + \frac{y - V_\gamma}{n}\right). \end{cases}$$

La dinámica de esta región se caracteriza por la conducción del transistor y el hecho de que la intensidad de colector es proporcional a la de base (amplificación):

$$i_b = \frac{u_b - V_\gamma}{R_b} = \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c},$$

$$i_c = \beta i_b = \beta \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.12) quedan:

$$\begin{aligned} \tau_c \dot{u} &= z - \frac{R_c}{R_o} u - R_c \beta \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c} + nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c}, \\ \tau_l \dot{z} &= E - z - nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c} - u, \\ \dot{y} &= \frac{1}{\tau} \left(E - y - nz - R \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c} \right) - \\ &\quad - \frac{n}{\tau_l} \left(E - z - nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2R_c} - u \right). \end{aligned}$$

Para intentar simplificar algo las expresiones usamos las constantes:

$$r = \frac{R_c}{R_o}, \quad s = \frac{\tau}{\tau_l},$$

ya consideradas anteriormente y definimos ahora otras dos:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{nR_c}{R_b + n^2R_c}, \\ \alpha &= \frac{R}{R_b + n^2R_c}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}
 \tau_c \dot{u} &= z - ru + \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right), \\
 \tau_l \dot{z} &= E - z - \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) - u, \\
 \tau \dot{y} &= E(1 - ns) - y - n(1 - s)z + \\
 &\quad + (ns\alpha_c - \alpha) (nE - nu + y - V_\gamma) + nsu.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Aplicando la hipótesis de relajación con $\tau_c \approx 0$, se tiene

$$0 = z - ru + \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right).$$

Veamos el caracter de la variedad lenta en esta zona, estudiando el signo de

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[z - ru + \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \right] = -r + n\alpha_c \left(\frac{\beta}{n} - 1\right).$$

Esta expresión es positiva cuando

$$\beta > \frac{r}{\alpha_c} + n$$

que en los parámetros originales del circuito equivale a

$$\beta > \frac{R_b + n^2 R_c}{n R_o} + n,$$

es decir

$$\beta n R_o > R_b + n^2 R_c + n^2 R_o.$$

Con los siguientes órdenes de magnitud

$$\begin{aligned}
 R_b &\simeq 100 \Omega, \\
 R_c &\simeq 1 K\Omega, \\
 n &\simeq 0,1, \\
 R_o &\simeq 1 K\Omega,
 \end{aligned}$$

La condición queda:

$$\beta > 1,2,$$

que se cumple siempre pues el orden de magnitud de β es por lo menos de 50.

Por lo tanto el carácter de la variedad lenta es repulsivo, y la trayectoria, al entrar en esta región, se convierte en un movimiento rápido, con $z, y = cte$.

Podemos también calcular el equilibrio. Haciendo en (1.15) las derivadas iguales a cero, queda

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{z} - r\bar{u} + \alpha_c (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right), \\ 0 &= E - \bar{z} - \alpha_c (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) - \bar{u}, \\ 0 &= E(1 - ns) - \bar{y} - n(1 - s)\bar{z} + \\ &\quad + (ns\alpha_c - \alpha) (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) + ns\bar{u}. \end{aligned}$$

La solución del sistema anterior conduce al equilibrio

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{1+r} \left[\frac{(V_\gamma - E) \alpha_c \beta}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)} + E \right] \\ \bar{z} &= \frac{rE}{1+r} - \alpha_c \frac{(E - V_\gamma) (n(1+r) - \beta)}{n(1+r)(1 - n\alpha_c + \alpha)} \\ \bar{y} &= V_\gamma - E \frac{nr}{1+r} + \frac{(E - V_\gamma) (1+r - \alpha_c \beta)}{(1 - n\alpha_c + \alpha) (1+r)} \end{aligned}$$

Cuando dividimos por $1 - n\alpha_c + \alpha$ tenemos la garantía de que no estamos dividiendo por cero pues:

$$1 - n\alpha_c + \alpha = 1 - n \frac{nR_c}{R_b + n^2 R_c} + \frac{R}{R_b + n^2 R_c} = \frac{R_b + R}{R_b + n^2 R_c} > 0$$

Veamos si el equilibrio está dentro de la región activa. Se habrá de verificar primeramente si

$$u > 0 \Leftrightarrow \frac{(V_\gamma - E) \alpha_c \beta}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)} + E > 0,$$

pero esta condición es equivalente a

$$\frac{\alpha_c \beta}{(1 - n\alpha_c + \alpha)} < \frac{nE}{E - V_\gamma},$$

y se llega a la condición

$$\beta \frac{R_c}{R_b + R} < \frac{E}{E - V_\gamma}, \quad (1.16)$$

que puede cumplirse o no.

Otra condición que se debe cumplir

$$\bar{u} < E + \frac{\bar{y} - V_\gamma}{n},$$

que nos llevaría a

$$0 < \frac{E - V_\gamma}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)},$$

lo cual se cumple pues

$$\begin{aligned} E &> V_\gamma, \\ 1 - n\alpha_c + \alpha &= \frac{R_b + R}{R_b + n^2 R_c} > 0. \end{aligned}$$

Finalmente también debe cumplirse

$$\bar{u} > k \left(E + \frac{\bar{y} - V_\gamma}{n} \right),$$

lo que nos conduce a

$$\frac{1 - k}{1 + r} \left[\frac{(V_\gamma - E) \alpha_c \beta}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)} + E \right] > k \frac{E - V_\gamma}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)},$$

que reagrupando nos lleva a

$$\frac{(V_\gamma - E) \alpha_c \beta}{nE(1 - n\alpha_c + \alpha)} > \frac{1 - \frac{V_\gamma}{E}}{n(1 - n\alpha_c + \alpha)} \cdot \frac{1 + r}{\frac{1}{k} - 1} - 1,$$

sustituyendo los parámetros del circuito llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{E - V_\gamma}{E} \cdot \frac{\beta R_c}{R_b + R} < 1 - \frac{E - V_\gamma}{E} \cdot \frac{\beta R_{sat}}{R_b + R} \cdot \left(1 + \frac{R_c}{R_o} \right)$$

que observamos que es más restrictiva que la condición (1.16). Podemos reescribir esta condición de la siguiente manera

$$\frac{E - V_\gamma}{E} < \frac{R_o (R_b + R)}{\beta (R_c R_o + R_{sat} R_c + R_{sat} R_o)}. \quad (1.17)$$

expresión que puede cumplirse o no cumplirse, dependiendo fundamentalmente de los valores de R y R_{sat} . En cualquier caso la posición del equilibrio de activa no es relevante para nuestro análisis.

Región de saturación

Esta región queda definida por las siguientes desigualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} u \geq 0, \\ \frac{u}{R_{sat}} \leq \beta \frac{u_b - V_\gamma}{R_b}. \end{array} \right.$$

Análogamente a lo que vimos en la región activa, la última desigualdad se reduce a

$$u \leq k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right).$$

Las intensidades que circulan por el transistor en esta zona se caracterizan porque la intensidad de base ya no controla la intensidad de colector, cuyo valor viene determinado por la tensión colector-emisor:

$$i_b = \frac{u_b - V_\gamma}{R_b} = \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c},$$

$$i_c = \frac{u}{R_{sat}}.$$

Las ecuaciones del sistema 1.12 quedan ahora como sigue

$$\begin{aligned}
\tau_c \dot{u} &= z - \frac{R_c}{R_o} u - R_c \frac{u}{R_{sat}} + nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c}, \\
\tau_l \dot{z} &= E - z - nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c} - u, \\
\dot{y} &= \frac{1}{\tau} \left(E - y - nz - R \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c} \right) - \\
&\quad - \frac{n}{\tau_l} \left(E - z - nR_c \frac{nE - nu + y - V_\gamma}{R_b + n^2 R_c} - u \right).
\end{aligned}$$

Para intentar simplificar algo las expresiones usamos otra vez las constantes

$$\begin{aligned}
s &= \frac{\tau}{\tau_l}, \\
\alpha_c &= \frac{nR_c}{R_b + n^2 R_c}, \\
\alpha &= \frac{R}{R_b + n^2 R_c},
\end{aligned}$$

e introducimos otras dos nuevas

$$\begin{aligned}
R_p &= \frac{1}{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{sat}}}, \\
r' &= \frac{R_c}{R_p}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones 1.12 quedan ahora

$$\begin{aligned}
\tau_c \dot{u} &= z - r' u + \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) \\
\tau_l \dot{z} &= E - z - \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) - u \\
\tau \dot{y} &= E(1 - ns) - y - n(1 - s)z + \\
&\quad + (ns\alpha_c - \alpha) (nE - nu + y - V_\gamma) + nsu
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Para el cálculo del equilibrio, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{z} - r' u + \alpha_c (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) \\
0 &= E - \bar{z} - \alpha_c (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) - \bar{u} \\
0 &= E(1 - ns) - \bar{y} - n(1 - s)\bar{z} + \\
&\quad + (ns\alpha_c - \alpha) (nE - n\bar{u} + \bar{y} - V_\gamma) + ns\bar{u}
\end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{E}{r' + 1} \\ \bar{y} &= \frac{E - V_\gamma}{1 + \alpha - n\alpha_c} + V_\gamma - n \frac{r'E}{r' + 1} \\ \bar{z} &= \frac{r'E}{r' + 1} - \alpha_c \left(\frac{E - V_\gamma}{1 + \alpha - n\alpha_c} \right)\end{aligned}$$

Veamos si este equilibrio está en saturación. Evidentemente,

$$\frac{E}{r' + 1} > 0,$$

luego sólo hay que verificar la condición

$$\bar{u} \leq k \left(E + \frac{\bar{y} - V_\gamma}{n} \right).$$

Sustituámos las expresiones anteriores y obtenemos:

$$\frac{E}{r' + 1} \leq k \left(E + \frac{E - V_\gamma}{1 + \alpha - n\alpha_c} - n \frac{r'E}{r' + 1} \right),$$

o equivalentemente

$$\frac{E}{r' + 1} (1 - k) \leq \frac{k}{n} \frac{E - V_\gamma}{1 + \alpha - n\alpha_c}.$$

Si expresamos en los parámetros naturales del circuito la condición anterior, se obtiene finalmente

$$\frac{E}{E - V_\gamma} \leq \frac{R_c R_0 + R_c R_{sat} + R_0 R_{sat}}{R_0 (R_b + R)} \beta$$

si se verifica esta condición el equilibrio del sistema en saturación se encuentra en la propia región de saturación; teniendo en cuenta los valores normales de los parámetros, esta relación puede o no cumplirse, luego no tenemos garantizada la posición exacta del equilibrio. Habrá que determinarla para los valores concretos que se elijan para el circuito y si tenemos un parámetro variable que aparezca en la relación, podremos conseguir que el equilibrio esté fuera o dentro de la región de saturación.

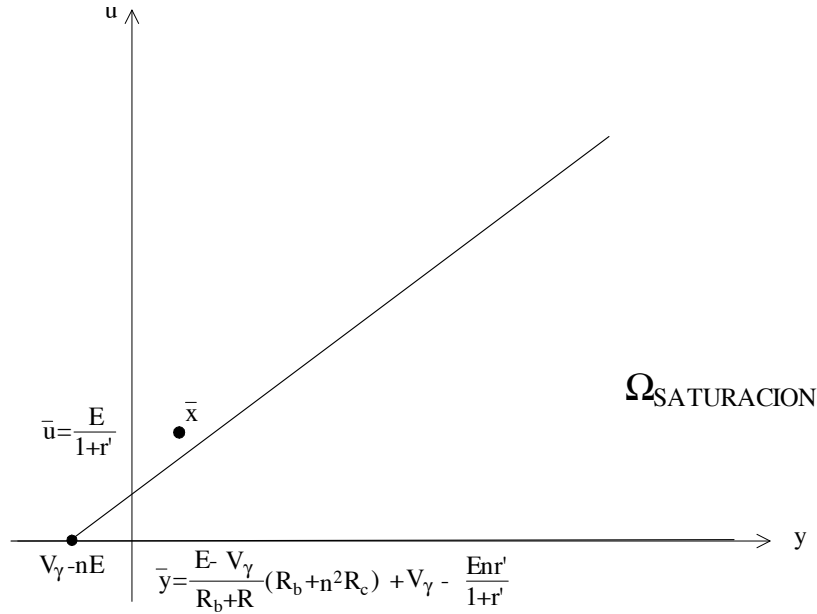


Figura 1.11: Equilibrio que gobierna la dinámica del sistema en la región de saturación (supuesto en activa).

Si comparamos esta expresión con la condición (1.17) vemos que es exactamente la contraria, es decir, si el equilibrio del sistema en saturación está en la propia región de saturación, entonces el equilibrio del sistema en activa no está en la zona de activa, y viceversa. Si se cumple la igualdad en (1.17) entonces ambos equilibrios coinciden en un punto que necesariamente se encuentra en el plano de separación entre la región de saturación y la de activa.

Podemos encontrar una representación del punto donde se encuentra el equilibrio (suponiendo, por ejemplo, que se encuentra en activa) en la figura 1.11.

Aplicando la hipótesis de relajación a las ecuaciones (1.18), cuando $\tau_c \approx 0$, llegamos a:

$$0 = z - r'u + \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma),$$

que nos da el plano “lento” de saturación

$$z = r'u - \alpha_c(nE - nu + y - V_\gamma).$$

Para ver el carácter de la variedad lenta, calculamos la expresión

$$\frac{\partial}{\partial u}(z - r'u + \alpha_c(nE - nu + y - V_\gamma)) = -r' + \alpha_c n,$$

y la condición para que la variedad sea atractiva resulta ser

$$-r' - \alpha_c n < 0 \Leftrightarrow r + \alpha_c n > 0,$$

lo cual se cumple, pues todos los parámetros implicados son positivos.

Por lo tanto, nos encontramos en una situación similar a la región de corte. Para poder escribir las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema sobre la variedad “lenta”, tenemos que sustituir la ecuación del plano lento en las otras dos ecuaciones de (1.18), como se indica a continuación. Primero eliminamos z de la segunda y tercera ecuación:

$$\begin{aligned} \tau_l \dot{z} &= E - r'u - u = E - u(1 + r') \\ \tau \dot{y} &= E(1 - ns) - y - n(r' - s(1 + r'))u + \\ &\quad + (n\alpha_c - \alpha)(nE - nu + y - V_\gamma) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ahora, calculamos la derivada de u a partir de la de z derivando la primera ecuación

$$\dot{z} = (r' + n\alpha_c)\dot{u} - \dot{y}\alpha_c$$

para obtener

$$\dot{u} = \frac{1}{(r' + n\alpha_c)}(\dot{z} + \dot{y}\alpha_c) = \frac{1}{(r' + n\alpha_c)\tau}(s\tau_l \dot{z} + \tau\alpha_c \dot{y}).$$

Ya podemos sustituir las expresiones (1.19) de las derivadas y escribir

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{(r' + n\alpha_c)\tau}(s(E - u(1 + r')) + \alpha_c(E(1 - ns) - y - \\ &\quad - n(r' - s(1 + r'))u + (n\alpha_c - \alpha)(nE - nu + y - V_\gamma)), \end{aligned}$$

de manera que el sistema proyectado en el plano (u, y) puede resumirse en

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{sat} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b}_{sat}$$

donde

$$\mathbf{A}_{sat} = \begin{pmatrix} \frac{-(r' + 1)s + \alpha_c n(\alpha - n\alpha_c + s + r'(s - 1))}{(r' + n\alpha_c)\tau} & \frac{\alpha_c(n\alpha_c - \alpha - 1)}{(r' + n\alpha_c)\tau} \\ \frac{n(\alpha - n\alpha_c + s + r'(s - 1))}{\tau} & \frac{(n\alpha_c - \alpha - 1)}{\tau} \end{pmatrix},$$

y el vector de constantes \mathbf{b}_{sat} es:

$$\mathbf{b}_{sat} = \begin{pmatrix} \frac{(s + \alpha_c(1 - ns))E + \alpha_c(n\alpha_c - \alpha)(nE - V_\gamma)}{(r' + n\alpha_c)\tau} \\ \frac{E(1 - ns) + (n\alpha_c - \alpha)(nE - V_\gamma)}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Es importante constatar que:

$$(r' + n\alpha_c) = \frac{R_c}{R_p} + \frac{n^2 R_c}{R_b + n^2 R_c} > 0,$$

ya que todos los términos son resistencias y por tanto son positivos, luego tenemos la garantía de no estar dividiendo por cero.

Para intentar simplificar un poco la notación introducimos los siguientes parámetros adicionales:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(n\alpha_c - \alpha - 1)}{\tau}, \\ \xi &= \frac{n(\alpha - n\alpha_c + s + r'(s - 1))}{\tau}, \\ \rho &= \frac{\alpha_c}{(r' + n\alpha_c)}, \\ \sigma &= \frac{(r' + 1)s}{(r' + n\alpha_c)\tau}, \end{aligned}$$

de manera que, ahora,

$$\mathbf{A}_{sat} = \begin{pmatrix} -\sigma + \rho\xi & \rho\mu \\ \xi & \mu \end{pmatrix},$$

con lo que dicha matriz depende sólo de cuatro parámetros de manera más o menos simple. Para determinar la estabilidad del equilibrio, nos interesa conocer los signos de la traza y el determinante de esta matriz:

$$\text{tr}(\mathbf{A}_{sat}) = -\sigma + \rho\xi + \mu,$$

y después de simplificar se llega a

$$\text{tr}(\mathbf{A}_{sat}) = \frac{s(r' + 1)(n\alpha_c - 1) - n\alpha_c - r'(\alpha + 1)}{(r' + n\alpha_c)\tau}.$$

Teniendo en cuenta el signo de la siguiente expresión:

$$n\alpha_c - 1 = n \frac{nR_c}{R_b + n^2R_c} - 1 = \frac{-R_b}{R_b + n^2R_c} < 0,$$

deducimos que $s(r' + 1)(n\alpha_c - 1) < 0$. Por lo tanto todos los términos en el numerador son negativos.

Como en el denominador sólo aparecen sumas y productos de parámetros positivos, es positivo, y concluimos que la traza de la matriz del sistema en saturación es negativa.

Si calculamos ahora el determinante de la matriz del sistema

$$\det(\mathbf{A}_{sat}) = (-\sigma + \rho\xi)\mu - \rho\mu\xi = -\sigma\mu,$$

y recordemos la definición de estos parámetros:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(n\alpha_c - \alpha - 1)}{\tau}, \\ \sigma &= \frac{(r' + 1)s}{(r' + n\alpha_c)\tau}, \end{aligned}$$

vemos que el signo coincide con el de $1 - n\alpha_c - \alpha$. Ahora bien:

$$1 - n\alpha_c + \alpha = 1 - \frac{n^2R_c}{R_b + n^2R_c} + \frac{R}{R_b + n^2R_c} = \frac{R + R_b}{R_b + n^2R_c} > 0,$$

y por lo tanto:

$$\det(\mathbf{A}_{sat}) = -\sigma\mu > 0.$$

En definitiva el equilibrio tendrá carácter estable en cualquier caso, pudiendo ser un foco o un nodo, degenerado o no. Este resultado lo podíamos

haber predicho teniendo en cuenta que si en el circuito del OB sustituimos el transistor por su modelo en saturación (que no es más que una resistencia entre base y emisor y otra entre colector y emisor) todos los componentes son pasivos, con lo que los equilibrios deben ser estables.

El carácter de foco o nodo lo podemos dilucidar calculando el signo de la expresión:

$$f(\mathbf{A}_{sat}) = tr(\mathbf{A}_{sat})^2 - 4 \det(\mathbf{A}_{sat}),$$

que expresada en función de los parámetros que estamos usando queda:

$$f(\mathbf{A}_{sat}) = (-\sigma + \rho\xi + \mu)^2 + 4\sigma\mu.$$

Sustituyendo el valor de los parámetros en esta expresión, se tiene después de realizar diversas simplificaciones

$$f(\mathbf{A}_{sat}) = \frac{(s(r' + 1)(n\alpha_c - 1) + n\alpha_c + r'(\alpha + 1))^2 + 4s\alpha(r' + n\alpha_c)(r' + 1)}{(r' + n\alpha_c)^2\tau^2}$$

Nos interesa el signo de la expresión. Para verlo podemos prescindir del denominador puesto que es positivo. En cuanto al numerador, expresado en los parámetros naturales del circuito, se llega a

$$\begin{aligned} sig(f(\mathbf{A}_{sat})) &= sig \left\{ (R_c + R_p) \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4s R R_c (n^2 R_p + n^2 R_c + R_b) \right\}. \end{aligned}$$

Si el signo de la expresión es positivo, tendremos un nodo, si es negativo, tendremos un foco, y si la expresión da cero tendremos un nodo degenerado. Entonces podemos escribir la condición frontera, es decir, la que da un nodo degenerado:

$$(R_c + R_p) \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 = -4s R R_c (n^2 R_p + n^2 R_c + R_b),$$

o equivalentemente

$$\left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 = 4s R (n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p}).$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &> 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{NODO} \\ \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &= 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{N. DEG.} \\ \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c(R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &< 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{FOCO} \end{aligned}$$

1.3. Planos y rectas notables.

Por lo que hemos visto, el espacio queda dividido en tres partes o regiones de funcionamiento, debido a la definición lineal a trozos del transistor.

En la figura 1.12 podemos ver estas regiones, proyectadas en el plano (u, y) que quedan definidas de la siguiente manera (consideramos siempre $u \geq 0$)

$$\begin{aligned} \Omega_{corte} &= \left\{ (u, y, z) : u \geq E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right\}, \\ \Omega_{activa} &= \left\{ (u, y, z) : k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) < u < E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right\}, \\ \Omega_{sat} &= \left\{ (u, y, z) : u \leq k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Recordemos que

$$k = \frac{1}{1 + \frac{R_b + n^2 R_c}{n\beta R_{sat}}} < 1.$$

Así pues las regiones están separadas por planos, que denominamos planos límite:

$$\begin{aligned} \text{Plano límite corte - activa} &: L_c \equiv u = E + \frac{y - V_\gamma}{n}, \\ \text{Plano límite activa - saturación} &: L_s \equiv u = k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right). \end{aligned}$$

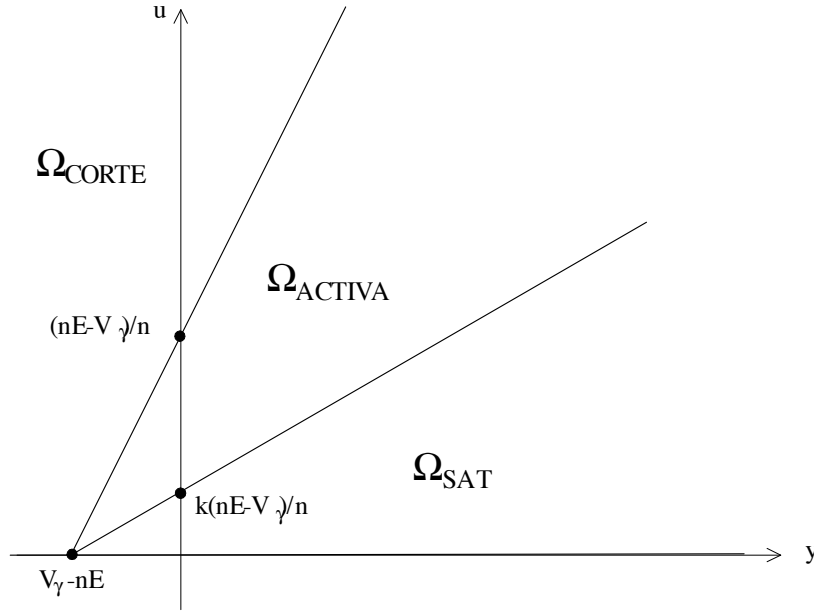


Figura 1.12: Separación en regiones por los planos límite

Además, dentro de cada región existe un plano lento, en el cual se mueven las trayectorias para el caso de corte y saturación:

$$\text{Plano lento de corte} : \Pi_c \equiv z = ru,$$

$$\text{Plano lento de activa} : \Pi_a \equiv z = ru - \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma) \left(1 - \frac{\beta}{n}\right),$$

$$\text{Plano lento de saturación} : \Pi_s \equiv z = r'u - \alpha_c (nE - nu + y - V_\gamma).$$

La intersección del plano lento de corte con el plano límite corte-activa determina la recta de salto de corte, que es por donde escapan las trayectorias de la región de corte:

$$r_{sc} \equiv \begin{cases} z = ru \\ u = E + \frac{y - V_\gamma}{n} \end{cases}$$

La intersección del plano lento de saturación con el plano límite activa-saturación determina la recta de salto de saturación, que es por donde escapan

las trayectorias de la región de saturación:

$$r_{ss} \equiv \begin{cases} z = r'u - \alpha_c(nE - nu + y - V_\gamma) \\ u = k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) \end{cases}$$

Cuando las trayectorias tocan una cualquiera de estas rectas, se produce una relajación, es decir, sólo varía la variable u mientras el resto permanece constante, hasta que la trayectoria cae en un plano lento. Con este criterio podemos determinar las rectas de caída.

La recta de caída de saturación es la proyección en dirección u de la recta de salto de corte sobre el plano lento de saturación:

$$r_{cs} \equiv \begin{cases} z = r'u - \alpha_c(nE - nu + y - V_\gamma) \\ z = r \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) \end{cases}$$

La recta de caída de corte es la proyección en dirección u de la recta de salto de saturación sobre el plano lento de corte:

$$r_{cc} \equiv \begin{cases} z = ru \\ z = r'k \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) - \alpha_c \left(nE - nk \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) + y - V_\gamma \right) \end{cases}$$

Que agrupando términos queda:

$$r_{cc} \equiv \begin{cases} z = ru \\ z = (k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c) \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right) \end{cases}$$

Para visualizar mejor estas rectas, las proyectaremos en el plano (u, y) .

Así, la recta proyección de la recta de caída de saturación es, eliminando

z

$$r_{pcs} \equiv r'u - \alpha_c(nE - nu + y - V_\gamma) = r \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right),$$

que agrupando términos queda:

$$r_{pcs} \equiv u = \frac{(r + n\alpha_c) \left(E + \frac{y - V_\gamma}{n} \right)}{r' + n\alpha_c}.$$

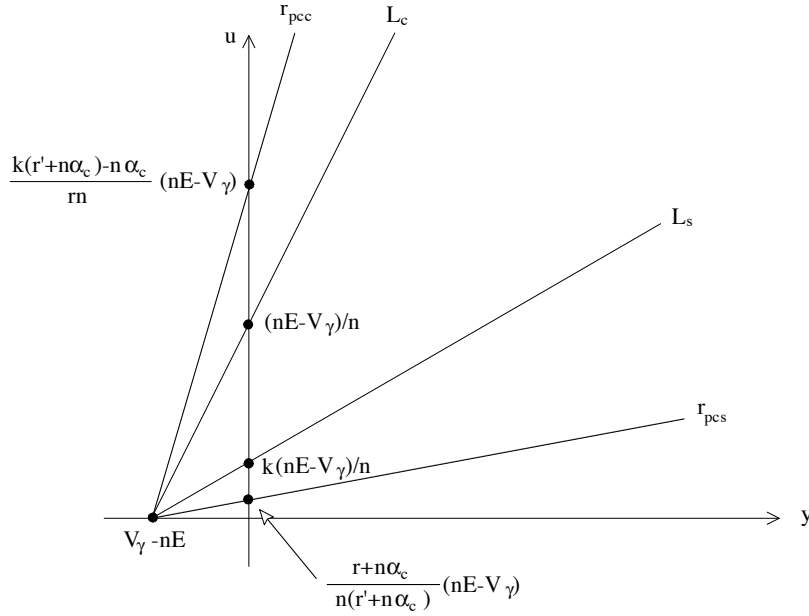


Figura 1.13: Rectas de caída y trazas de los planos límite

Y la recta proyección de la recta de caída de corte es:

$$r_{pcc} \equiv u = \frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)(E + \frac{y - V_\gamma}{n})}{r}$$

Para una situación genérica estas proyecciones junto con las trazas de los planos límite están dibujadas en la figura 1.13. Para que todo esté tal como está dibujado se tiene que cumplir la siguiente relación entre las pendientes de las rectas:

$$\frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)\frac{1}{n}}{r} > \frac{1}{n} > \frac{k}{n} > \frac{(r + n\alpha_c)\frac{1}{n}}{r' + n\alpha_c}.$$

Observamos que la desigualdad es obviamente equivalente a

$$k < 1,$$

que se cumple trivialmente, mientras que las desigualdades laterales

$$\frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)}{r} > 1,$$

$$\frac{(r + n\alpha_c)}{r' + n\alpha_c} < k,$$

son equivalentes entre sí, luego basta que se satisfaga la condición

$$\frac{r + n\alpha_c}{r' + n\alpha_c} < k.$$

En los parámetros naturales del circuito esta condición la podemos escribir como sigue

$$\frac{\frac{R_c}{R_o} + \frac{n^2 R_c}{R_b + n^2 R_c}}{\frac{R_c}{R_p} + \frac{n^2 R_c}{R_b + n^2 R_c}} < \frac{1}{1 + \frac{R_b + n^2 R_c}{n\beta R_{sat}}},$$

o bien

$$\frac{n^2 R_o + R_b + n^2 R_c}{n^2 R_p + R_b + n^2 R_c} \frac{R_p}{R_o} < \frac{1}{1 + \frac{R_b + n^2 R_c}{n\beta R_{sat}}},$$

que equivale a

$$n^2 R_o + R_b + n^2 R_c < n\beta R_o.$$

Esta condición resulta ser la misma que determina que el plano lento de activa tenga carácter repulsivo.

Como observación final hacemos notar que en el punto $u = 0$, $z = 0$, $y = V_u - nE$ se cortan las dos rectas de caída, las dos rectas de salto, y tanto los planos lentos como los planos límite.

1.3.1. Posición relativa de los equilibrios de corte y saturación

Es interesante comprobar la posición relativa de los equilibrios de corte y saturación. Ya habíamos calculado que

$$\bar{u}_c = \frac{E}{1+r},$$

$$\bar{u}_{sat} = \frac{E}{1+r'}.$$

Si tenemos en cuenta la relación entre r y r' :

$$\frac{r}{r'} = \frac{\frac{R_c}{R_o}}{\frac{R_c}{R_p}} = \frac{R_p}{R_o} = \frac{R_{sat}}{R_{sat} + R_o},$$

podemos obtener su posición relativa respecto a la variable u :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{sat}}{\bar{u}_c} &= \frac{1+r}{1+r'} = \frac{1 + \frac{R_c}{R_o}}{1 + \frac{R_c}{R_p}} = \frac{R_p R_o + R_c}{R_o R_p + R_c} = \frac{R_{sat}}{R_{sat} + R_o} \frac{R_o + R_c}{\frac{R_o R_{sat}}{R_o + R_{sat}} + R_c} = \\ &= \frac{R_{sat}(R_o + R_c)}{R_o R_{sat} + R_c R_{sat} + R_o R_c} = 1 - \frac{R_o R_c}{R_o R_{sat} + R_c R_{sat} + R_o R_c}. \end{aligned}$$

Vemos claramente que

$$\frac{\bar{u}_{sat}}{\bar{u}_c} < 1,$$

con lo que independientemente del valor de los parámetros el equilibrio en saturación está por debajo (en su proyección en el plano (u, y)) respecto al equilibrio en corte.

Veamos ahora la otra coordenada de los mismos equilibrios en dicho plano:

$$\bar{y}_c = E \left(1 - \frac{nr}{1+r}\right),$$

$$\bar{y}_{sat} = \frac{E - V_\gamma}{1 + \alpha - n\alpha_c} + V_\gamma - n \frac{r'E}{1+r'}.$$

Recordemos que

$$1 + \alpha - n\alpha_c = \frac{R_b + R}{R_b + n^2 R_c}.$$

En el circuito, $R \simeq 50 \text{ K}\Omega$, $R_c \simeq 1 \text{ K}\Omega$ y $R_b \simeq 100\Omega$. Por lo tanto:

$$1 + \alpha - n\alpha_c \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \alpha - n\alpha_c} \ll 1.$$

Por otro lado,

$$\frac{r'}{1 + r'} = \frac{R_c}{R_c + R_p},$$

y como R_{sat} es una resistencia pequeña comparada con el resto, es decir,

$$R_p = \frac{R_{sat} R_o}{R_{sat} + R_o} \simeq R_{sat} \ll R_c,$$

tenemos que

$$\frac{r'}{1 + r'} \simeq 1,$$

lo cual implica que el equilibrio de saturación estará cerca del eje u

$$\bar{y}_{sat} \simeq V_\gamma - nE.$$

Esta no será la posición del equilibrio pues estamos restando cantidades parecidas y ya tendrá peso el primer término, pero sirve para ver que el equilibrio está situado en los alrededores del eje u .

Sin embargo, en el equilibrio de corte se tiene:

$$\frac{r}{1 + r} = \frac{R_c}{R_c + R_o} \simeq \frac{1}{2},$$

y por lo tanto:

$$\bar{y}_c = E\left(1 - \frac{nr}{1 + r}\right) \simeq E\left(1 - \frac{n}{2}\right) \simeq E.$$

Deducimos que con los valores que se emplean de las resistencias, se tiene

$$\bar{y}_c > \bar{y}_{sat},$$

es decir, el equilibrio en corte está a la derecha del equilibrio en saturación. Un dibujo de la posición aproximada se puede ver en la figura 1.14.

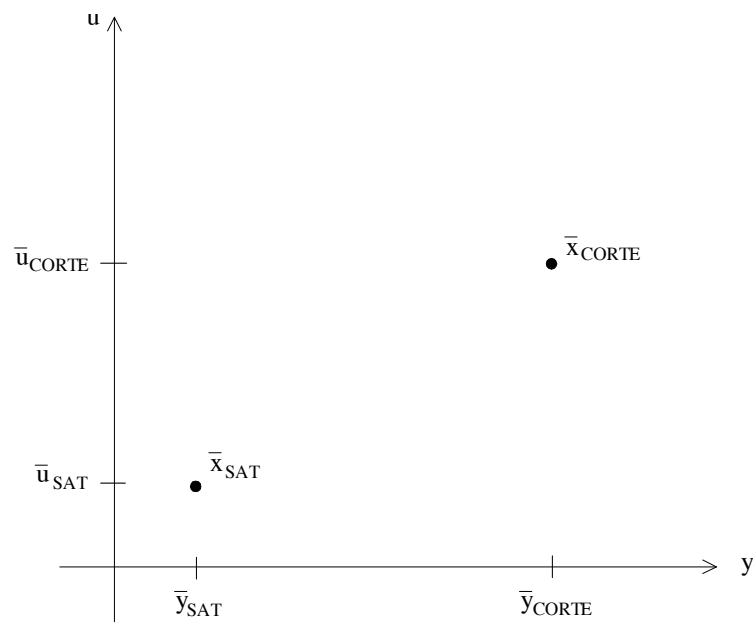


Figura 1.14: Posición relativa de los equilibrios de corte y saturación

Capítulo 2

Comportamiento global del OB

Tras haber visto el comportamiento en cada región de funcionamiento del OB, pasamos ahora a detallarlo en general.

Es importante recordar que el equilibrio de la región de corte se halla siempre fuera de ella, y es estable, con lo que cuando el sistema se encuentre en corte tenderá a salir de esa región.

Por contra, el equilibrio de activa es inestable luego también el sistema tendrá la tendencia de escapar de esta región (más aún si consideramos la hipótesis de relajación).

Sin embargo, el equilibrio de saturación es estable y en un principio podría encontrarse dentro de la propia región de saturación. Luego nos encontramos con dos posibles casos:

1) El equilibrio de saturación no está en la región de saturación: entonces el comportamiento que podemos esperar del sistema en saturación es como en las otras regiones, es decir, tenderá a salir de la zona.

2) El equilibrio de saturación está en la región de saturación: entonces existirían trayectorias que podrían ser atrapadas por el equilibrio, aunque también existiría la posibilidad de que las órbitas atravesaran el plano límite entre saturación y activa en cuyo caso entrarían en la región activa.

Partiendo de las posiciones de estos equilibrios, podemos esperar, respectivamente, el siguiente comportamiento global del sistema:

1) Órbitas oscilatorias que pueden o no tender a un ciclo límite, lo que trataremos de comprobar mediante una aplicación de Poincaré.

2) Posible coexistencia de órbitas oscilatorias (como las del caso anterior) con órbitas que son atrapadas por el equilibrio de saturación.

Teniendo en cuenta la hipótesis de relajación y lo expuesto en anteriores

apartados, de las órbitas oscilatorias podemos esperar lo siguiente:

i) Serán oscilaciones de relajación, que describirán, en el espacio de fases, la parte lenta de su trayectoria sobre los planos lentos, mientras que la parte rápida serán rectas con la dirección de u entre los planos lentos, en primera aproximación.

ii) Las rectas de entrada y salida de los planos lentos son las rectas de caída y de salto descritas en el apartado anterior.

iii) Las escalas de tiempo en las zonas lentas pueden ser distintas, es decir, puede haber un movimiento “lento lento” y otro “lento rápido” con lo que nos encontraríamos con tres escalas de tiempo.

iv) Las trayectorias pueden tender a un ciclo límite, pueden ser atrapadas por un equilibrio y por tanto cesar la oscilación; también podría darse la existencia de comportamientos caóticos. Una de nuestras tareas en adelante es intentar demostrar si se pueden dar estos comportamientos o no.

Para estudiar estas trayectorias empleamos las aplicaciones de Poincaré que pasamos a describir en el siguiente apartado.

2.1. Aplicaciones de Poincaré

Para poder reducir la complejidad del sistema y analizar su comportamiento global, construiremos una aplicación de Poincaré de una recta en sí misma.

Esta aplicación asigna a un punto de la recta, que llamaremos u_i , otro punto de la propia recta que se calcula siguiendo la órbita del sistema que tiene como punto inicial u_i , hasta que vuelve a intersectar con la recta, en este punto que llamaremos u_f .

El retorno de la órbita no está garantizado, pues podría suceder que la trayectoria del sistema quedara atrapada por un equilibrio estable. También, teniendo en cuenta la tridimensionalidad de nuestro sistema podría ocurrir que la órbita no intersectara de nuevo con la recta.

Sin embargo, en virtud de la hipótesis de relajación, tenemos reducido el comportamiento del sistema a movimientos confinados a los planos lentos en las regiones de corte y saturación, y a saltos en la dirección u en la región de activa.

Por tanto, es posible elegir adecuadamente la recta sobre la cual construiremos la aplicación de Poincaré, de modo que tendremos garantizado el retorno excepto por la posibilidad de que la trayectoria quede atrapada por

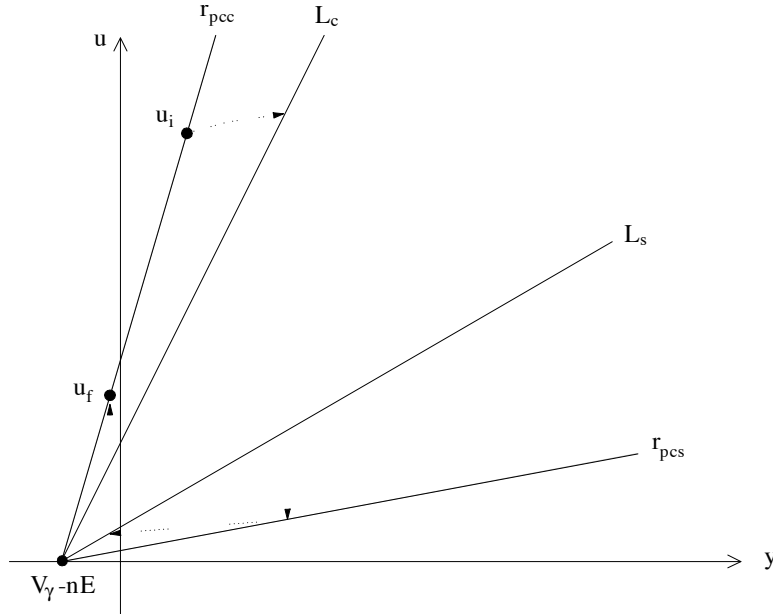


Figura 2.1: Trayectoria con un punto inicial en la recta r_{pcc}

un equilibrio estable, lo que sólo puede ocurrir en saturación por lo visto en anteriores apartados.

La recta elegida será la recta de caída en corte, que nos asegura, salvo caída en el equilibrio de saturación, que la trayectoria retorna tras describir exactamente un movimiento en corte, un salto de corte a saturación, un movimiento en saturación, y finalmente un salto de saturación a corte que cae exactamente en la recta de caída de corte, es decir, nuestra recta de salida. Podemos observar esta trayectoria en la figura 2.1.

Obtención analítica de la aplicación de Poincaré

Pasamos ahora a obtener una expresión analítica de la curva de la aplicación, que se puede obtener en forma implícita. Denominamos Γ a nuestra aplicación:

$$\begin{aligned} \Gamma & : r_{pcc} \longmapsto r_{pcc} \\ u_i \in r_{pcc} & \longmapsto \Gamma(u_i) = u_f \in r_{pcc} \end{aligned} \quad (2.1)$$

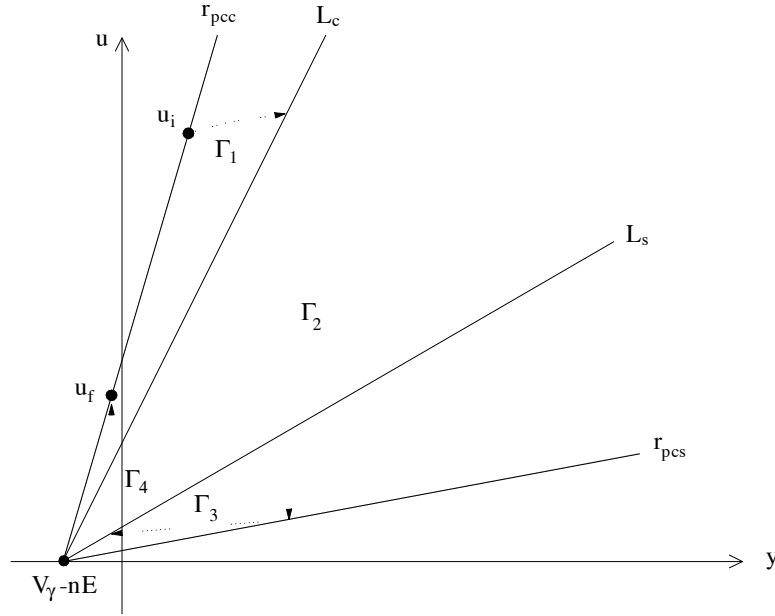


Figura 2.2: Construcción de las aplicaciones Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , y Γ_4 .

Para ello, como conocemos el comportamiento de nuestro sistema para cada región, lo que hacemos es construir las siguientes aplicaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_1 : r_{pcc} \longmapsto r_{sc} \\ \Gamma_2 : r_{sc} \longmapsto r_{pcs} \\ \Gamma_3 : r_{pcs} \longmapsto r_{ss} \\ \Gamma_4 : r_{ss} \longmapsto r_{pcc} \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$$

Estas aplicaciones se ven claramente en la figura 2.2.

Para construir estas aplicaciones, distinguimos Γ_2 y Γ_4 de las otras dos, puesto que realmente el comportamiento del sistema desde una recta de salto hasta una de caída es un movimiento en la dirección u con el resto de variables constante. Así, si tenemos la expresión de la recta de salto:

$$a_s u + b_s y + c_s = 0,$$

y la expresión de la recta de caída:

$$a_c u + b_c y + c_c = 0,$$

sólo tenemos que relacionar u_i y u_f a través de y_0 que es el valor que toma y en el salto. Así, partiendo del sistema

$$\begin{aligned} a_s u_i + b_s y_0 + c_s &= 0, \\ a_c u_f + b_c y_0 + c_c &= 0, \end{aligned}$$

se llega a la expresión

$$u_f = \frac{b_c \frac{a_s u_i + c_s}{b_s} - c_c}{a_c} = \frac{b_c a_s u_i + (b_c c_s - b_s c_c)}{b_s a_c},$$

y, por lo tanto,

$$\Gamma_{j=2,4}(u_i) = \frac{b_c a_s u_i + (b_c c_s - b_s c_c)}{b_s a_c},$$

que es una expresión lineal como cabía esperar.

Para nuestro caso particular, como las expresiones de las rectas son:

$$\begin{aligned} r_{sc} &\equiv n \cdot u - y + (V_\gamma - nE) = 0, \\ r_{ss} &\equiv \frac{n}{k} \cdot u - y + (V_\gamma - nE) = 0, \\ r_{pcc} &\equiv nr \cdot u - (k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c) \cdot y + (k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c) \cdot (V_\gamma - nE) = 0, \\ r_{pcs} &\equiv n(r' + n\alpha_c) \cdot u - (n\alpha_c + r) \cdot y + (n\alpha_c + r) \cdot (V_\gamma - nE) = 0, \end{aligned}$$

llegamos a la siguiente expresión para las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(u_i) &= \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot u_i, \\ \Gamma_4(u_i) &= \frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)}{rk} \cdot u_i. \end{aligned}$$

Para las aplicaciones Γ_1 y Γ_3 sólo podemos obtener ecuaciones paramétricas en función del tiempo. A esta variable temporal la denominaremos tiempo de vuelo, t_v .

Trabajaremos con el vector de variables de estado, definido como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}.$$

En general, para obtener estas ecuaciones, disponemos de la ecuación de la recta de salida, que podemos expresar como:

$$\mathbf{R}_s \mathbf{x}_i + S_s = 0, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{R}_s es un vector fila de dos componentes, y S_s es una constante; también disponemos de la ecuación de la recta de llegada, que podemos expresar como:

$$\mathbf{R}_{ll}\mathbf{x}_f + S_{ll} = 0, \quad (2.3)$$

donde \mathbf{R}_{ll} es un vector fila de dos componentes, y S_{ll} es una constante; y finalmente, como el sistema es lineal en esta región, podemos expresar \mathbf{x}_f en función de \mathbf{x}_i y t_v empleando la matriz exponencial:

$$\mathbf{x}_f = e^{\mathbf{A}t_v}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

dónde \mathbf{A} es la matriz del sistema en la región y $\bar{\mathbf{x}}$ el equilibrio del sistema. Sustituyendo (2.4) en (2.3) llegamos a:

$$\mathbf{R}_{ll}(e^{\mathbf{A}t_v}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll} = 0. \quad (2.5)$$

Por otro lado, usando (2.2) podemos expresar \mathbf{x}_i en función de u_i :

$$\begin{pmatrix} R_{s1} & R_{s2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ y_i \end{pmatrix} + S_s = 0 \Rightarrow y_i = \frac{-1}{R_{s2}}(R_{s1}u_i + S_s),$$

con lo que llegamos a:

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{R_{s1}}{R_{s2}} \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{S_s}{R_{s2}} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 u_i + \mathbf{w}_2,$$

\parallel
 \mathbf{w}_1

\parallel
 \mathbf{w}_2

lo que sustituido en (2.5) nos lleva a:

$$\mathbf{R}_{ll}(e^{\mathbf{A}t_v}(\mathbf{w}_1 u_i + \mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll} = 0,$$

expresión de la cual podemos despejar u_i , siempre que $\mathbf{R}_{ll} \cdot e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1 \neq 0$:

$$u_i = -\frac{\mathbf{R}_{ll} \cdot (e^{\mathbf{A}t_v} \cdot (\mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll}}{\mathbf{R}_{ll} \cdot e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1} = f_1(t_v). \quad (2.6)$$

Con la relación anteriormente obtenida tenemos \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{x}_i = -\mathbf{w}_1 \frac{\mathbf{R}_{ll} \cdot (e^{\mathbf{A}t_v} \cdot (\mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll}}{\mathbf{R}_{ll} \cdot e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1} + \mathbf{w}_2,$$

y podemos sustituir este valor inicial en (2.4) para obtener el valor final:

$$\mathbf{x}_f = e^{\mathbf{A}t_v} \left(-\mathbf{w}_1 \frac{\mathbf{R}_{ll} \cdot (e^{\mathbf{A}t_v} \cdot (\mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll}}{\mathbf{R}_{ll} \cdot e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1} + \mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}} \right) + \bar{\mathbf{x}} = f_2(t_v). \quad (2.7)$$

Las expresiones (2.6) y (2.7) definen una curva en parámétricas, correspondiente a la aplicación

$$u_f = \Gamma_j(u_i), \quad j=1,3$$

Sustituyendo los diversos parámetros por sus valores en la zona de corte y saturación obtenemos respectivamente, Γ_1 y Γ_3 . En el primero de los casos, como conocemos los autovectores y los autovalores, y siendo el equilibrio un nodo, conocemos las expresiones de $e^{\mathbf{A}t_v}$. Por tanto, podemos realizar un estudio más detallado, que pasamos a ver a continuación.

Aplicación Γ_1 . Resultados analíticos y cualitativos.

Al ser triangular la matriz \mathbf{A}_{CORTE} , podemos obtener ciertos resultados analíticos. Además como ya vimos el equilibrio siempre es un nodo, con lo que podemos calcular una expresión de la matriz exponencial:

$$e^{\mathbf{A}t_v} = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_v} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t_v} \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}$$

Sustituyendo los valores la expresión queda:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t_v} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -nr & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -nr & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -nr & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nr & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & 0 \\ -nre^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & e^{-\frac{t_v}{\tau}} + nre^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado, conocemos el equilibrio del sistema:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1 + \frac{r}{nr}} \\ E(1 - \frac{r}{1+r}) \end{pmatrix},$$

y las rectas de salida y llegada:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= (nr, -(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)), \\ S_s &= (k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)(V_\gamma - nE), \\ \mathbf{R}_{ll} &= (n, -1), \\ S_{ll} &= V_\gamma - nE, \end{aligned}$$

luego podemos obtener también \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-R_{s1}}{R_{s2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{nr}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-S_s}{R_{s2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_\gamma - nE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ya tenemos todos los parámetros que necesitamos; para escribir la ecuación (2.6) calculamos primero algunas expresiones que serán útiles:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ll} \cdot e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1 &= (n, -1) \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & 0 \\ -nre^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} + nre^{-\frac{t_v}{\tau}} & e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{nr}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c} \end{pmatrix} \\ &= (n + nr)e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - \left(nr + \frac{nr}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}\right)e^{-\frac{t_v}{\tau}}, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t_v} \cdot (\mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & & 0 \\ & -\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l} & \\ -nre^{-\frac{t_v}{\tau}} & +nre^{-\frac{t_v}{\tau}} & e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ V_\gamma - nE \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{E}{1+r} \\ E\left(1 - \frac{nr}{1+r}\right) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \frac{E}{1+r} \\ E\left(1 - \frac{nr}{1+r}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{E}{1+r} \left(1 - e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}}\right) \\ \frac{nrE}{(1+r)} \left(e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - 1\right) + (V_\gamma - nE)e^{-\frac{t_v}{\tau}} + E \left(1 - e^{-\frac{t_v}{\tau}}\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

así, podemos llegar a

$$\mathbf{R}_{ll} \cdot (e^{\mathbf{A}t_v} \cdot (\mathbf{w}_2 - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{x}}) + S_{ll} = nE \left(e^{-\frac{t_v}{\tau}} - e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} \right) + (V_\gamma - E) \left(1 - e^{-\frac{t_v}{\tau}} \right).$$

Por lo tanto, ya podemos escribir u_i :

$$u_i = \frac{E \left(e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - e^{-\frac{t_v}{\tau}} \right) + \frac{V_\gamma - E}{n} \left(e^{-\frac{t_v}{\tau}} - 1 \right)}{(r+1)e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - r \left(1 + \frac{1}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} \right) e^{-\frac{t_v}{\tau}}},$$

con lo que hemos llegado a una expresión relativamente simple de u_i .

Calculemos ahora u_f . Usamos la expresión (2.7) pero recordando que sólo

necesitamos la primera fila.

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}t_v} \cdot \mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} & 0 \\ -nre^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} + nre^{-\frac{t_v}{\tau}} & e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{nr} \\ \frac{1}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} \\ -nre^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} + nr \left(1 + \frac{1}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} \right) e^{-\frac{t_v}{\tau}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como ya conocemos el resto de las expresiones, podemos escribir u_f :

$$\begin{aligned}
 u_f &= \frac{E \left(e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - e^{-\frac{t_v}{\tau}} \right) + \frac{V_\gamma - E}{n} \left(e^{-\frac{t_v}{\tau}} - 1 \right)}{(r+1)e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - r \left(1 + \frac{1}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} \right) e^{-\frac{t_v}{\tau}}} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} + \\
 &+ \frac{E}{1+r} \left(1 - e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} \right),
 \end{aligned}$$

y finalmente llegamos a:

$$\begin{aligned}
 u_f &= \frac{\frac{E}{1+r} \left(\frac{r}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} - 1 \right) e^{-\frac{t_v}{\tau}} + \frac{V_\gamma - E}{n} \left(e^{-\frac{t_v}{\tau}} - 1 \right)}{(r+1)e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} - r \left(1 + \frac{1}{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)} \right) e^{-\frac{t_v}{\tau}}} e^{-\frac{(1+r)t_v}{r\tau_l}} + \\
 &+ \frac{E}{1+r}.
 \end{aligned}$$

Es importante que el denominador no se anule para no estar dividiendo por cero. Podría darse el caso ya que existen algunos problemas con esta parametrización de la aplicación, como veremos más abajo.

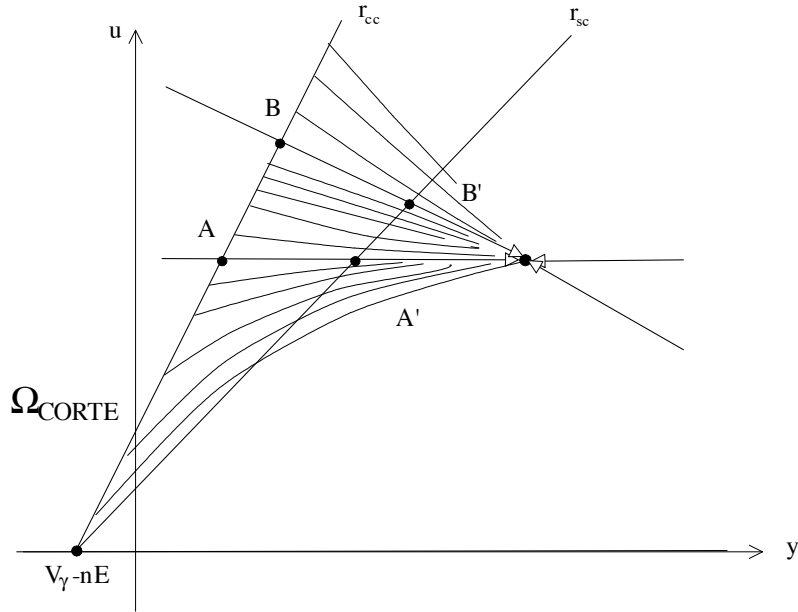


Figura 2.3: Dibujo parcial del plano de fases entre las dos rectas. Caso $\lambda_1 \simeq \lambda_2$

Es fácil ver de las expresiones que $\Gamma_1(0) = 0$, con $t_v = 0$, lo que era de esperar pues la recta de caída y la de salto se cortan en el origen.

También podemos deducir directamente de (2.4), sin necesidad de emplear las ecuaciones, que $\Gamma_1(\bar{u}) = \bar{u}$, ya que hay un autovalor con la dirección del eje u . Este punto en las siguientes figuras se representa como A , y su imagen como A' . También podemos determinar otro punto, y su imagen, que son los resultantes de la intersección de la otra recta de autovalores con la recta de caída y la de salto, respectivamente. A este punto lo denotaremos por B y a su imagen por B' .

Podemos ver la situación en la figura (2.3), en la que se esboza como sería el plano de fases si todo el sistema estuviera en la zona de corte, supuestos iguales los dos autovalores.

Recordemos que el autovector asociado a λ_1 es siempre horizontal. En las figuras 2.4 y 2.5 vemos un esbozo de como sería el plano de fases si uno de los dos autovalores fuera suficientemente mayor que el otro.

Es importante señalar que en la aplicación sólo consideramos la información respecto a la coordenada u , de los cortes de las órbitas con la recta de caída y la de salto.

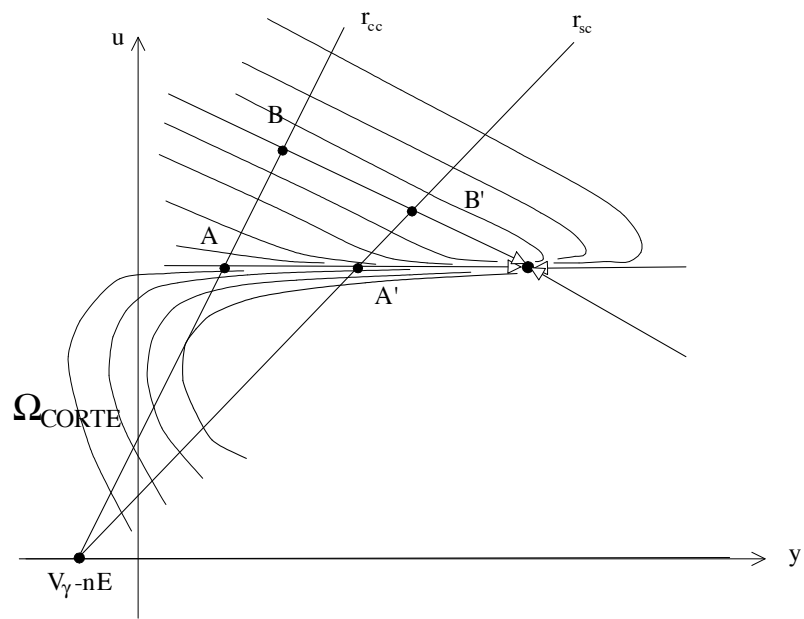


Figura 2.4: Dibujo parcial del plano de fases situado entre las dos rectas.
Caso $\lambda_1 > \lambda_2$.

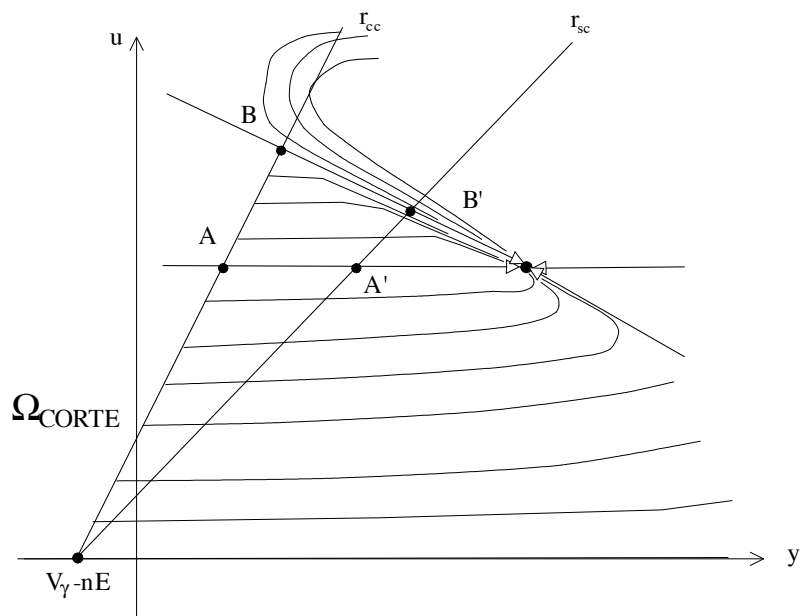


Figura 2.5: Dibujo parcial del plano de fase situado entre las dos rectas. Caso $\lambda_1 < \lambda_2$.

La expresión analítica de la coordenada u de los puntos A , A' , B , y B' es fácil de obtener:

$$u_A = u_{A'} = \bar{u} = \frac{E}{1+r}$$

Para calcular B y B' debemos calcular la coordenada u de la intersección entre la recta que pasa por el equilibrio y con dirección el autovector asociado a λ_2 , cuya expresión es:

$$u - \frac{E}{1+r} = -\frac{1}{nr}(y - E(1 - \frac{nr}{1+r})),$$

es decir,

$$u = -\frac{1}{nr}(y - E),$$

y las rectas de caída en corte y caída en saturación, respectivamente, cuyas expresiones son:

$$r_{pcc} \equiv u = \frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)(E + \frac{y - V_\gamma}{n})}{r},$$

$$r_{sc} \equiv u = E + \frac{y - V_\gamma}{n}.$$

Como la pendiente de la recta del autovector es siempre negativa e igual a $-rn$, la recta siempre tendrá la orientación con la que la hemos dibujado en las figuras. Las pendientes de las rectas de caída y salto son positivas y la primera siempre mayor que la segunda como vimos en anteriores apartados. Por esto siempre se cumplirá $u_A < u_{B'} < u_B$.

Los puntos resultantes son:

$$u_B = \frac{E + \frac{E - V_\gamma}{n}}{r \left(1 + \frac{1}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c} \right)},$$

$$u_{B'} = \frac{E + \frac{E - V_\gamma}{n}}{1+r}.$$

Por otro lado, como hemos visto, es importante la relación que existe entre los autovalores del sistema en corte. Esta relación está controlada por

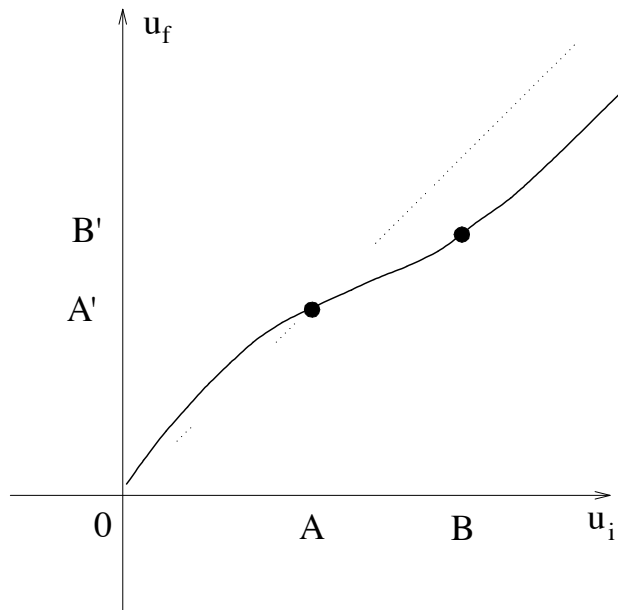


Figura 2.6: Esbozo de la gráfica de la aplicación Γ_1 para el caso $\lambda_1 = \lambda_2$.

los valores de s y r , ya que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-\frac{1}{\tau}}{-\frac{1+r}{r\tau_l}} = \frac{r}{s(1+r)}$$

Pasamos ahora a realizar un esbozo de la gráfica de la aplicación empleando las ideas anteriores para justificar su forma cualitativa.

En el caso de que los autovalores sean similares podemos esperar una curva monótonamente creciente y continua debido a la unicidad de las trayectorias y a que sólo se cortan una vez con cada recta. Al principio estará levemente por encima de la línea de 45° debido a que las trayectorias tienden a acumularse en la dirección del autovector horizontal, y por el mismo motivo una vez pasado el punto A la gráfica estará por debajo de esta línea, y cuando se supera el punto B la gráfica se irá aplanando lentamente, aunque siempre será creciente. Podemos ver un esbozo en la figura 2.6.

Si $\lambda_1 > \lambda_2$, entonces las trayectorias se mueven fundamentalmente en la dirección del autovector horizontal, como podemos ver en la figura 2.4.

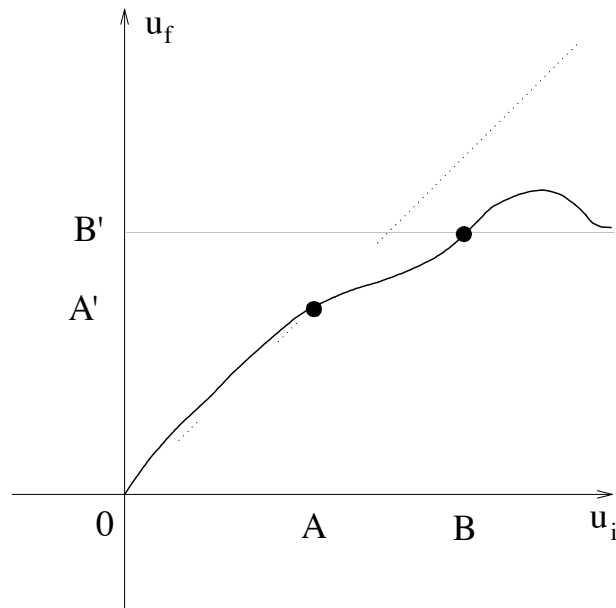


Figura 2.7: Esbozo de la gráfica de la aplicación Γ_1 , caso $\lambda_1 < \lambda_2$.

Entonces, la gráfica de la aplicación, hasta acercarnos al punto B , debe ser aproximadamente coincidente con la línea de 45° . Una vez nos acercamos a ese punto, irá creciendo más despacio y una vez superado, llegará un momento en el que llega a un máximo, y después decaerá asintóticamente a B' . Este máximo corresponde con la órbita tangente que se puede apreciar en la figura del plano de fase. Todas las órbitas posteriores pasan una vez más por la recta de caída antes de llegar a la de salto.

Un esbozo de como podría ser la gráfica de la aplicación se muestra en la figura 2.7.

Si $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces las trayectorias se mueven fundamentalmente en la dirección del autovector diagonal, como podemos ver en la figura 2.5. Entonces la gráfica de la aplicación, hasta llegar al punto A , primero decrece desde A' , alcanza un mínimo y después vuelve a crecer hasta llegar al valor A' en el punto A . Este mínimo corresponde con la órbita tangente que se puede apreciar en la figura del plano de fase. Todas las órbitas que parten de un punto inferior al de tangencia pasan dos veces por la recta de caída antes de llegar a la de salto. Una vez superado el punto A , irá creciendo más despacio y una vez superado B' , se irá pareciendo a una recta con pendiente

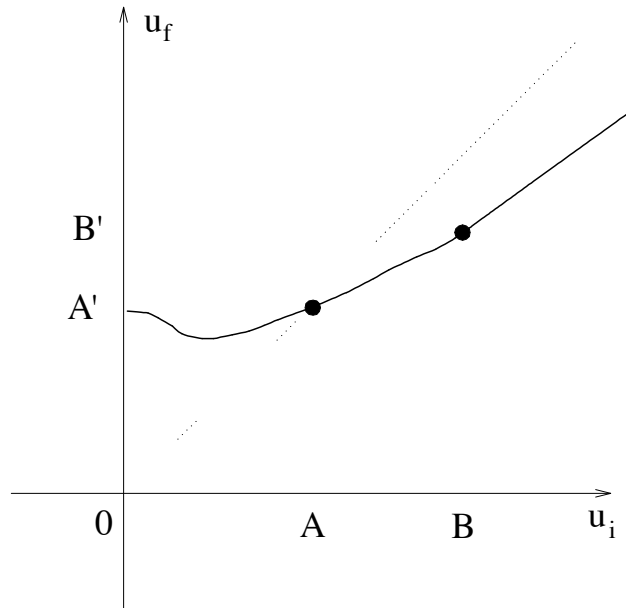


Figura 2.8: Esbozo de la gráfica de la aplicación Γ_1 , caso $\lambda_1 < \lambda_2$.

inferior a la recta de 45° , ya que la recta de caída se aplica en la de salto aproximadamente por una paralela a la recta diagonal asociada al autovector de λ_2 .

Un esbozo de como podría ser la gráfica de la aplicación se muestra en la figura 2.8.

Como hemos visto, los puntos de tangencia de las órbitas del sistema con la recta de caída pueden tener cierta importancia, ya que representan máximos o mínimos en la gráfica de la aplicación Γ_1 . Por otro lado, no es difícil calcular estos puntos analíticamente, ya que deben cumplir dos condiciones:

- Estar sobre la recta de caída, lo que viene dado por la ecuación de la recta.
- La trayectoria del sistema que pasa por el punto debe ser tangente a la recta. Esto viene dado por la condición de que el producto escalar del vector normal a la recta, \mathbf{n} , y el vector tangente a la trayectoria $\dot{\mathbf{x}}$ debe ser nulo.

De la ecuación de la recta de caída,

$$u = \frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)(E + \frac{y - V_\gamma}{n})}{r},$$

podemos calcular el vector normal:

$$\mathbf{n} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)}{rn} \end{array} \right),$$

por lo que imponemos la condición

$$0 = (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{x}}) = s \frac{(E - (1+r)u)}{r\tau} - \frac{(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)}{nr\tau} (E(1 - ns) - y + n(s - r(1 - s))u)$$

Eliminando y entre esta ecuación y la ecuación de la recta podemos calcular el valor de u en el punto de tangencia

$$\begin{aligned} u &= \frac{V_\gamma ((k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)) + E (ns - (k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c)(1 - ns + n))}{n(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c + 1)(r(1 - s) - s)} = \\ &= \frac{1}{r(1 - s) - s} \left(E(1 - s) + \frac{V_\gamma - E}{n} + \frac{E(1 + n) - V_\gamma}{n(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c + 1)} \right). \end{aligned}$$

Una vez más hacemos la observación de que:

$$-n\alpha_c + 1 = \frac{-n^2 R_c + R_b + n^2 R_c}{R_b + n^2 R_c} = \frac{R_b}{R_b + n^2 R_c} > 0,$$

y por lo tanto,

$$n(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c + 1) > 0.$$

Sin embargo, si $\lambda_1 = \lambda_2$, como

$$\frac{r}{s(1+r)} = 1,$$

se deduce que

$$r = s + sr \Leftrightarrow r(1 - s) - s = 0,$$

es decir, que cuando los autovalores son iguales no existe punto de tangencia (como cabía esperar). Además es lógico que la expresión de los puntos de tangencia tenga una discontinuidad en dicho punto, pues, si partimos de $\lambda_1 \ll \lambda_2$ el punto de tangencia prácticamente está en A ; conforme λ_1 va creciendo, el punto de tangencia se va desplazando hacia abajo hasta que los autovalores son iguales, momento en el que no existe. Si ahora λ_1 sigue creciendo, el punto de tangencia aparecerá desde el infinito por la parte de B y se irá acercando hasta confundirse prácticamente con dicho punto cuando $\lambda_1 \gg \lambda_2$.

El interés de este punto de tangencia es que representa un mínimo o un máximo en la aplicación Γ_1 , con lo que en un entorno de ese punto la aplicación no será biyectiva. Como Γ está formada por la composición de todas las aplicaciones, sería posible conseguir que la aplicación resultante no fuera biyectiva. Este hecho es fundamental si queremos encontrar similitud entre la aplicación Γ y la conocida aplicación logística, que es susceptible (bajo condiciones adicionales) de exhibir comportamiento caótico.

En este mismo sentido, para que el mínimo o el máximo sea realmente interesante, debemos procurar que no esté ni demasiado cerca ni demasiado lejos del punto de corte con la recta del autovector dominante en régimen permanente. En el primero de los casos, las trayectorias se acumularían en el punto A o B según corresponda, y en el segundo de los casos se nos saldría de la zona de valores normales del circuito, careciendo de interés.

Aplicación Γ_3 . Resultados analíticos y cualitativos.

Debido a la expresión de la matriz del sistema en saturación, no vemos conveniente obtener explícitamente la representación paramétrica de la aplicación.

Haremos, como para el caso de corte, un estudio cualitativo de la forma de la gráfica, especialmente si el equilibrio es un nodo y se encuentra fuera de la zona de saturación, que es el caso más relevante en la práctica.

En tal caso es posible la existencia de puntos de tangencia como los vistos en corte, que provocarían máximos o mínimos en la gráfica de la aplicación. Podemos calcular estos puntos de la misma manera que lo hicimos en corte. A partir de la ecuación de la recta

$$u = \frac{(r + n\alpha_c)\left(E + \frac{y - V_\gamma}{n}\right)}{r' + n\alpha_c},$$

obtenemos su vector normal

$$\mathbf{n} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{(r + n\alpha_c)}{n(r' + n\alpha_c)} \end{array} \right),$$

e imponemos la condición de nulidad a

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{(r' + n\alpha_c)\tau} \{ (s + \alpha_c(1 - ns))E - (n\alpha_c r' + (1 - n\alpha_c)s(1 + r'))u - \\ &\quad - \alpha_c y + \alpha_c(n\alpha_c - \alpha)(nE - nu + y - V_\gamma) - \\ &\quad - \frac{(r + n\alpha_c)}{n} [E(1 - ns) - y - n(r' - s(1 + r'))u + \\ &\quad + (n\alpha_c - \alpha)](nE - nu + y - V_\gamma) \}, \end{aligned}$$

que lleva a

$$\begin{aligned} 0 &= u(rr' - (1 + r)s(1 + r') + r(n\alpha_c - \alpha)) + y \left(\frac{r}{n}(\alpha + 1 - n\alpha_c) \right) + \\ &\quad + E \left(s(1 + r) - \frac{r}{n} - r(n\alpha_c - \alpha) \right) + V_\gamma \left(\frac{r}{n}(n\alpha_c - \alpha) \right). \end{aligned}$$

Eliminando y entre esta ecuación y la ecuación de la recta podemos calcular el valor de u en el punto de tangencia:

$$u = \frac{E(r - s(1 + r)) + \frac{r}{n}(E - V_\gamma)}{rr' - (1 + r)s(1 + r') + r(n\alpha_c - \alpha) \frac{r - r'}{r + n\alpha_c} + r \frac{r' + n\alpha_c}{r + n\alpha_c}}$$

Siempre que el denominador es distinto de cero. Si se anulara, para dichos valores de los parámetros no existiría punto de tangencia.

En saturación ocurre también una situación especial. Podemos conseguir que el equilibrio del sistema esté en la propia zona, con lo que habrá órbitas que quedarán atrapadas por el equilibrio, con lo que existirá un rango de valores de u donde la aplicación no estará definida. La órbita límite entre las que son atrapadas y las que no lo son es tangente a la recta de salto, como podemos observar en la figura 2.9. En dicha figura se ha supuesto el autovalor correspondiente a una dirección mayor que el otro.

En el caso de la figura 23 las órbitas que comienzan con valores pequeños de u pueden saltar de vuelta a corte, pero las que empiezan con un valor de

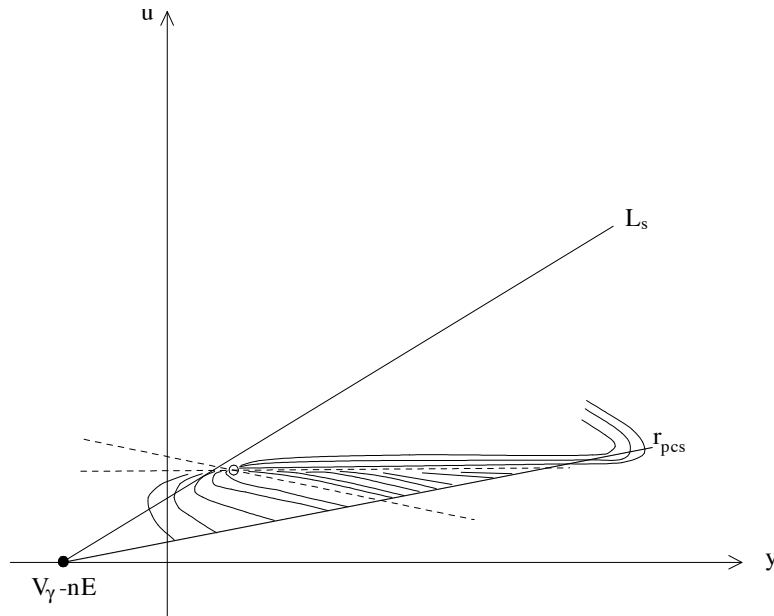


Figura 2.9: Porción del plano de fases comprendida entre la recta de salto y caída de saturación, con el equilibrio en la propia zona.

u mayor son atrapadas por el equilibrio. Es posible pensar en una situación simétrica en la que suceda lo contrario, bastaría cambiar la pendiente de la recta del autovector asociado al autovalor menor de modo que sea inferior a la pendiente del autovector asociado al mayor.

Este punto de tangencia también se puede determinar analíticamente. Lo calculamos de la misma manera que lo hicimos para los otros puntos, partiendo de la ecuación de la recta de salto,

$$u = k\left(E + \frac{y - V_\gamma}{n}\right),$$

y de su vector normal

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{n} \end{pmatrix},$$

imponemos que

$$0 = (\mathbf{n}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(r' + n\alpha_c)\tau} \{s + \alpha_c(1 - ns))E - [n\alpha_c r' + (1 - n\alpha_c)s(1 + r')]u - \alpha_c y + \alpha_c(n\alpha_c - \alpha)(nE - nu + y - V_\gamma) - \frac{k(r' + n\alpha_c)}{n} [E(1 - ns) - y - n(r' - s(1 + r'))u + (n\alpha_c - \alpha)(nE - nu + y - V_\gamma)]\}.$$

Después de eliminar y , el valor de u en el punto de tangencia resulta ser:

$$u = \frac{E \left(s - \frac{kr' + n\alpha_c(k-1)}{n}(1 - n(s-1)) \right) + V_\gamma \frac{kr' + n\alpha_c(k-1)}{n}}{-s(1 + r') + (kr' + (k-1)n\alpha_c)(r' - s(1 + r')) + \frac{k-1}{k}(n\alpha_c - \alpha) + \frac{1}{k}}$$

Consideraciones cualitativas sobre la aplicación de Poincaré

Consideraremos ahora la aplicación de Poincaré, que resulta de la composición de las anteriormente vistas, y trataremos de sacar algunas conclusiones sobre su comportamiento. Básicamente nuestro objetivo será obtener cotas para la imagen de algunos puntos notables. En primer lugar, intentamos acotar $\Gamma(u_A)$ y escribimos:

$$\Gamma(u_A) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(u_A) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2(u_{A'}).$$

Ahora bien, $\Gamma_2(u_{A'})$ es fácil de obtener, pues

$$\Gamma_2(u_{A'}) = \Gamma_2\left(\frac{E}{1+r}\right) = \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot \frac{E}{1+r},$$

y por lo tanto, obtenemos que

$$\Gamma(u_A) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \left(\frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot \frac{E}{1+r} \right).$$

Antes de seguir con la expresión anterior, veamos que $\Gamma_2(u_{A'})$ está por debajo del equilibrio de saturación. La condición

$$\bar{u}_{sat} > \Gamma_2(A'),$$

es equivalente a

$$\frac{E}{1+r'} > \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot \frac{E}{1+r},$$

y después de algunas simplificaciones se llega a

$$r(n\alpha_c - 1) > r'(n\alpha_c - 1) \Leftrightarrow r < r',$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$n\alpha_c - 1 = \frac{n^2 R_c}{n^2 R_c + R_b} - 1 = \frac{-R_b}{n^2 R_c + R_b} < 0.$$

Cuando sustituimos los valores de r y r' , vemos que

$$r < r' \Leftrightarrow \frac{R_c}{R_0} < \frac{R_c}{R_p} \Leftrightarrow \frac{R_0 R_{sat}}{R_0 + R_{sat}} < R_0,$$

lo cual es evidentemente cierto.

Podemos concluir que, en condiciones genéricas, la trayectoria que parte de $\Gamma_2(u_{A'})$ tenderá a buscar el equilibrio, luego $\Gamma_3 \circ \Gamma_2(u_{A'})$ será menor que \bar{u}_{sat} .

Así pues, como Γ_4 es creciente, tenemos que

$$\Gamma(u_A) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2(u_{A'}) < \Gamma_4(\bar{u}_{sat}),$$

donde

$$\Gamma_4(\bar{u}_{sat}) = \frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{rk} \bar{u}_{sat} = \frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{rk} \cdot \frac{E}{r' + 1}.$$

Por otro lado, podemos suponer que en la trayectoria dentro de la región de saturación el valor de u no disminuye, es decir, que $\Gamma_3 \circ \Gamma_2(u_{A'})$ será algo mayor que $\Gamma_2(u_{A'})$.

Esto implica que, como Γ_4 es creciente, tenemos

$$\Gamma(u_A) = \Gamma_4(\Gamma_3 \circ \Gamma_2(A')) > \Gamma_4(\Gamma_2(A')),$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\Gamma_2(A')) &= \frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{rk} \Gamma_2(A') = \\ &= \frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{rk} \cdot \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot \frac{E}{1+r}. \end{aligned}$$

Ahora nos proponemos demostrar que

$$\Gamma_4(\Gamma_2(A')) > A,$$

para lo cual escribimos la desigualdad equivalente

$$\frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{rk} \cdot \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot \frac{E}{1+r} > \frac{E}{1+r}.$$

Tras algunas operaciones se llega a la desigualdad

$$\frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} < k,$$

que no es sino la condición

$$n^2 R_o + R_b + n^2 R_c < n\beta R_o,$$

que es la misma que determina que el plano lento de activa tenga carácter repulsivo, luego debe cumplirse.

En definitiva, hemos probado que

$$u_A < \Gamma_4(\Gamma_2(u_{A'})) < \Gamma(u_A) < \Gamma_4(\bar{u}_{sat}),$$

consiguiendo tanto una cota superior como inferior para la imagen del punto A .

La situación relativa de los diversos puntos está representada en la figura 2.10. Hacemos notar que, aceptando la hipótesis de relajacion, la única suposición adicional que hemos hecho en este análisis ha sido considerar que al caer en saturación, la trayectoria en dicha región no escapa de la banda comprendida entre los valores de caída de u y el valor de \bar{u}_{sat} .

Ahora realizaremos un análisis similar para el punto B . Comenzamos recordando que

$$\Gamma(u_B) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1(u_B) = \Gamma_4 \circ \Gamma_3 \circ \Gamma_2(u_{B'})$$

donde

$$u_B = \frac{E + \frac{E - V_\gamma}{n}}{r \left(1 + \frac{1}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c} \right)},$$

pero no es posible en general asegurar su validez, por lo que seguiremos un razonamiento que tenga en cuenta también el caso contrario.

Así, si se verifica (2.8) escribiendo

$$\bar{u}_{sat} < \Gamma_2(u_{B'}),$$

y aplicando un razonamiento análogo al del punto A podemos suponer que

$$\Gamma_4(\bar{u}_{sat}) < \Gamma(u_B) < \Gamma_4(\Gamma_2(u_{B'})).$$

Es ahora inmediato comprobar que

$$\Gamma_4(\Gamma_2(u_{B'})) < u_B,$$

puesto que dicha desigualdad conduce a

$$[k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c + 1] \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \frac{1}{1 + r} < k,$$

que es equivalente a

$$\frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} < k,$$

condición ya comprobada anteriormente.

Si por el contrario, se verifica la condición contraria a (2.8), es decir

$$\Gamma_2(u_{B'}) < \bar{u}_{sat},$$

podríamos escribir

$$\Gamma_2(u_{B'}) < \Gamma_3(\Gamma_2(u_{B'})) < \bar{u}_{sat}.$$

De nuevo, usando la monotonía de Γ_4 conseguimos probar que

$$\Gamma_4(\Gamma_2(u_{B'})) < \Gamma(u_B) < \Gamma_4(\bar{u}_{sat}).$$

Entonces, de nuevo obtenemos que

$$\Gamma_4(\bar{u}_{sat}) < u_B,$$

siempre que

$$\frac{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}{k} \frac{E}{1 + r'} < \frac{E + \frac{E - V_\gamma}{n}}{1 + \frac{1}{k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c}},$$

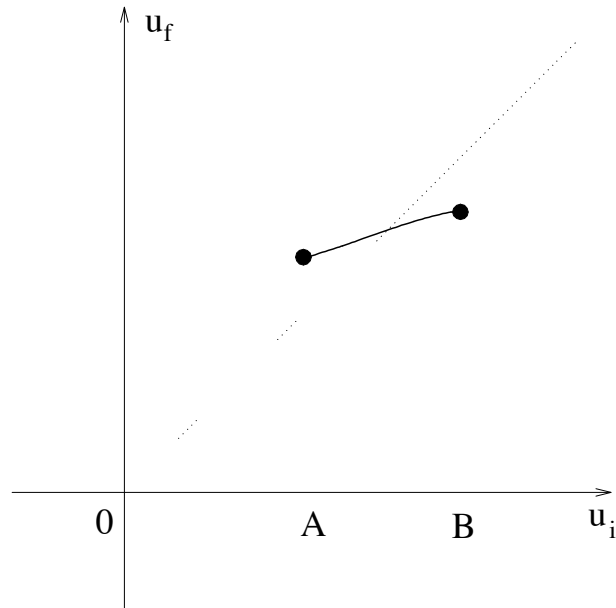


Figura 2.12: Posible forma de la gráfica de la aplicación de Poincaré

y además en dicho intervalo, la aplicación Γ es monótona. Entonces, la forma de la gráfica de la aplicación de Poincaré sería aproximadamente la de la figura 2.12. Si la hipótesis de monotonía sobre Γ_3 no fuera válida, aún podríamos realizar acotaciones adicionales que asegurarían la condición anterior. En cualquier caso nuestra conclusión principal es la existencia de un punto fijo para Γ que da cuenta de la oscilación que se observa en el oscilador de bloqueo.

Parte III
Simulación

En esta segunda parte del trabajo presentamos resultados de simulación que permitirán calibrar la bondad del modelado realizado anteriormente y confirmar los comportamientos que se pueden predecir a partir del análisis matemático del modelo.

Capítulo 3

Elección de los parámetros

En el circuito aparecen algunos parámetros que dependen del transistor elegido y sobre los que no tenemos mucho control, como son β , R_b , R_{sat} , y V_γ . Para éstos, usaremos los siguientes valores aproximados (obtenidos usando valores de curvas de [11] y de simulaciones con el programa PSPICE):

$$\begin{aligned}\beta &= 50, \\ R_b &= 100 \Omega, \\ R_{sat} &= 5 \Omega, \\ V_\gamma &= 0,65 V.\end{aligned}$$

Además, tenemos otra serie de parámetros:

- Resistencias: R , R_c y R_0 .
- Condensadores: C_c y C .
- Parámetros del transformador de pulsos: n y L .
- Fuente de alimentación: E .

Como además C_c representa una capacidad parásita del transistor, su valor debe de ser muy pequeño, del orden de algunos picofaradios.

Recordemos también algunos parámetros que se han introducido para

facilitar la escritura de algunas expresiones:

$$\begin{aligned}
 \tau &= RC, \\
 \tau_l &= \frac{L}{R_c}, \\
 \tau_c &= R_c C_c, \\
 s &= \frac{\tau}{\tau_l}, \\
 r &= \frac{R_c}{R_o}, \\
 R_p &= \frac{1}{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{sat}}}, \\
 r' &= \frac{R_c}{R_p}, \\
 \alpha_c &= \frac{nR_c}{R_b + n^2 R_c}, \\
 \alpha &= \frac{R}{R_b + n^2 R_c}, \\
 k &= \frac{1}{1 + \frac{R_b + n^2 R_c}{n\beta R_{sat}}}.
 \end{aligned}$$

Para elegir estos parámetros de forma coherente tenemos que basarnos primeramente en las condiciones expuestas en la parte de modelado:

- Hipótesis de relajación:

$$\begin{aligned}
 \tau_c &\ll \tau, \\
 \tau_c &\ll \tau_l,
 \end{aligned}$$

condiciones que expresadas en los parámetros del circuito llevan a:

$$\begin{aligned}
 R_c C_c &\ll RC, \\
 R_c C_c &\ll \frac{L}{R_c}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

- Repulsividad del plano lento de la región activa:

$$\beta > \frac{r}{n\alpha_c} + 1,$$

que en los parámetros del circuito lleva a:

$$\beta > \frac{R_b + n^2 R_c}{n^2 R_0} + 1 \Rightarrow n^2 R_0 + R_b + n^2 R_c < n^2 \beta R_0. \quad (3.2)$$

Aparte de estas condiciones que son importantes para que las hipótesis realizadas en el modelado del problema sean correctas, tenemos otras condiciones que nos determinan el posible comportamiento del sistema en saturación:

- Condición para que el equilibrio de saturación esté dentro de la región de saturación:

$$\frac{E}{E - V_\gamma} \leq \frac{R_c R_0 + R_c R_{sat} + R_0 R_{sat}}{R_0 (R_b + R)} \beta. \quad (3.3)$$

- Tipo de equilibrio de saturación:

$$\begin{aligned} \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c (R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &> 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{NODO} \\ \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c (R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &= 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{N. DEG.} \\ \left((n^2 R_c - s R_b) + \frac{R_c (R + R_b)}{(R_c + R_p)} \right)^2 &< 4sR \left(n^2 R_c + \frac{R_c R_b}{R_c + R_p} \right) \Rightarrow \text{FOCO} \end{aligned}$$

Además también conocemos la posición de ciertos puntos notables, como podemos ver en la figura 3.1.

tangencia de una de las rectas de caída o de salto con una órbita del plano de fases:

- Tangencia con la recta de caída en corte:

$$u = \frac{1}{r(1-s) - s} \left(E(1-s) + \frac{V_\gamma - E}{n} + \frac{E(1+n) - V_\gamma}{n(k(r' + n\alpha_c) - n\alpha_c + 1)} \right).$$

- Tangencia con la recta de caída en saturación:

$$u = \frac{E(r - s(1+r)) + \frac{r}{n}(E - V_\gamma)}{rr' - (1+r)s(1+r') + r(n\alpha_c - \alpha) \frac{r - r'}{r + n\alpha_c} + r \frac{r' + n\alpha_c}{r + n\alpha_c}}.$$

- Tangencia con la recta de salto de saturación:

$$u = \frac{E \left(s - \frac{kr' + n\alpha_c(k-1)}{n}(1 - n(s-1)) \right) + V_\gamma \frac{kr' + n\alpha_c(k-1)}{n}}{-s(1+r') + (kr' + (k-1)n\alpha_c)(r' - s(1+r')) + \frac{k-1}{k}(n\alpha_c - \alpha) + \frac{1}{k}}.$$

Capítulo 4

Simulaciones realizadas

Se han elegido diversas configuraciones de parámetros para ver posibles comportamientos del OB. En este apartado tanto las gráficas de las diversas aplicaciones de Poincaré como las de las formas de onda han sido obtenidas con MATLAB, usando siempre la hipótesis de relajación (para más detalles, consultar la última parte).

4.1. Comportamiento normal del OB

Primeramente, para reproducir las curvas normales del oscilador de bloqueo, cuya misión es crear ondas aproximadamente rectangulares de tensión, o pulsos, se han realizado tres simulaciones variando la relación entre los autovalores en corte para ver como varía la forma de estos pulsos. Recordemos que dichos autovalores verifican

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{r}{s(1+r)}.$$

Lo que haremos será variar el valor del condensador C manteniendo constante el resto de los parámetros en los siguientes valores:

$$\begin{aligned} R_c &= R_0 = 1 \text{ K}\Omega, \\ R &= 64 \text{ K}\Omega, \\ C_c &= 20 \text{ pF}, \\ n &= 0,1, \\ L &= 100 \text{ mH}, \\ E &= 7 \text{ V}, \end{aligned}$$

Con estos valores, se cumplen (3.1) y (3.2). Además, de (3.3) el equilibrio en saturación está en la región de activa, y será un nodo estable. La relación entre autovalores de corte queda:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2s} = \frac{10^{-7}}{128C} = \frac{7,8125 \cdot 10^{-10}}{C}.$$

Se han adoptado los siguientes valores de C que a su vez nos dan una relación entre los autovalores en corte:

$$\begin{aligned} 1a) \ C &= 781,25 \text{ pF} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1, \\ 1b) \ C &= 78,125 \text{ pF} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 10, \\ 1c) \ C &= 15,625 \text{ nF} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0,05. \end{aligned}$$

Veamos las aplicaciones de Poincaré y las formas de onda en estos tres casos.

Caso 1a) La aplicación de Poincaré correspondiente aparece en la figura ???. En ella observamos la forma que podíamos predecir a partir de un cierto valor, pero antes de este es completamente plana. Para explicar este fenómeno podemos ver las semiaplicaciones Γ_1 y Γ_3 que se pueden ver respectivamente en las figuras ?? y ??. La primera tiene la forma que podíamos esperar para el caso de autovalores en corte iguales, y la segunda podemos observar que tiene una primera zona inicial plana, para valores muy pequeños de la variable u . Esta zona es la que motiva la forma de la gráfica de la aplicación de Poincaré puesto que Γ_2 tiene el siguiente valor.

$$\Gamma_2(u_i) = \frac{n\alpha_c + r}{n\alpha_c + r'} \cdot u_i = \frac{0,1 + 1}{0,1 + 201} \cdot u_i = 0,0055u_i$$

Y por tanto valores de hasta $u_i = 5 V$ en la recta de salto de corte caen en la zona donde la aplicación Γ_3 es aproximadamente constante, lo cual es reflejado en la forma de la aplicación global.

En las figuras ?? y ?? podemos observar trayectorias del sistema partiendo de una condición inicial grande y pequeña respectivamente. En estas figuras se han dibujado además las rectas de caída y salto. Podemos apreciar, como cabía esperar de la forma de la aplicación de Poincaré, que una condición inicial pequeña llega rápidamente al ciclo límite y una condición inicial grande oscila disminuyendo su amplitud hasta que finalmente también llega al ciclo límite.

Finalmente, en la figura ?? podemos ver las formas de onda de las variables naturales del circuito: u , I , v . Las formas de la onda de tensión son las de un tren de ondas rectangulares, con un tiempo de valor bajo similar al tiempo de valor alto.

Caso 1b) La aplicación de Poincaré para este caso aparece en la figura ?. En ella observamos una forma similar al caso anterior, lo cual era de esperar puesto que la aplicación Γ_2 es la misma.

En la figura ?? está dibujada la gráfica de la aplicación Γ_1 para este caso. Podemos observar la forma predicha para la situación $\lambda_1 > \lambda_2$, si bien no influye nada en la aplicación global debido a que el máximo se encuentra en una zona de valores de u muy grandes.

En las figuras ?? y ?? podemos observar trayectorias del sistema partiendo de una condición inicial grande y pequeña respectivamente. En estas figuras se han dibujado además las rectas de caída y salto. Podemos apreciar lo mismo que en el caso anterior, ya que la aplicación de Poincaré es similar. Una condición inicial pequeña llega rápidamente al ciclo límite y una condición inicial grande oscila disminuyendo su amplitud hasta que finalmente también llega al ciclo límite.

En la figura ?? podemos ver las formas de onda de las variables naturales del circuito. La tensión u se asemeja ahora más a un tren de pulsos.

Caso 1c) Para este caso podemos ver la aplicación de Poincaré en la figura ?. De nuevo observamos una forma similar al caso anterior, lo cual era de esperar puesto que la aplicación Γ_2 sigue siendo la misma.

En la figura ?? está dibujada la gráfica de la aplicación Γ_1 para este caso. Podemos observar la forma predicha para la situación $\lambda_2 > \lambda_1$, si bien su influencia no se deja notar en la aplicación global puesto que se halla en la zona de valores bajos de tensión que es aplanada por la influencia de Γ_2 y Γ_3 .

En las figuras ?? y ?? podemos observar trayectorias del sistema partiendo de una condición inicial grande y pequeña respectivamente. En estas figuras se han dibujado además las rectas de caída y salto. Podemos apreciar lo mismo que en los casos anteriores, ya que la aplicación de Poincaré es similar. Una condición inicial pequeña llega rápidamente al ciclo límite y una condición inicial grande oscila disminuyendo su amplitud hasta que finalmente también llega al ciclo límite.

Finalmente, en la figura ?? podemos ver las formas de onda de las variables naturales del circuito. La tensión u está ahora a un valor alto la mayor parte del tiempo, con una forma de nuevo aproximadamente rectangular. Este es el funcionamiento típico del oscilador de bloqueo.

Comparando estos tres casos entre sí, observamos que la elección de la relación entre los autovalores en corte influye considerablemente en la forma de la onda de tensión, pudiendo así conseguir desde pulsos a ondas rectangulares. Vemos también que en estos casos, con $r' \gg r$, el ciclo límite es muy estable, estando en una zona de pendiente prácticamente nula de la aplicación de Poincaré.

4.2. Otros comportamientos del OB

Veamos ahora otros dos casos, de nuevo con el equilibrio de saturación fuera de la zona de saturación, con lo que el comportamiento esperado es un ciclo límite, y siendo de nuevo un nodo estable. Sin embargo esta vez usaremos unos valores de las resistencias R_c y R_0 menores para aproximar los valores de r y r' (es decir, disminuimos la pendiente de la recta de caída en corte y por tanto la aplicación Γ_2 ya no tiene unos valores tan reducidos).

4.2.1. Caso 2

En este caso, tomamos los siguientes valores.

$$\begin{aligned}
 R_c &= R_0 = 25 \Omega, \\
 R &= 45 K\Omega, \\
 C_c &= 20 pF, \\
 n &= 0,1, \\
 L &= 100 mH, \\
 E &= 15 V, \\
 C &= 78,125 \mu F.
 \end{aligned}$$

Con estos valores, se cumplen (3.1) y (3.2). Además, de nuevo, podemos deducir de (3.3) que el equilibrio en saturación está en la región de activa, y será un nodo estable. Por otro lado tenemos los siguientes valores de parámetros.

$$\begin{aligned}
 r &= 1, \\
 r' &= 6, \\
 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= 5,68 \cdot 10^{-4} \ll 1.
 \end{aligned}$$

Luego nos encontramos en un caso similar al 1c. En la figura ?? podemos ver la aplicación Γ_1 con un mínimo muy marcado como cabía esperar por nuestras predicciones para este caso. Esta vez sin embargo al ser Γ_3 mayor que en el caso anterior, el mínimo aparece también en la aplicación global de Poincaré como podemos ver en la figura ??.

Como habíamos previsto para este caso el mínimo se encuentra antes del ciclo límite y por tanto no lo vuelve inestable, si bien en este caso es menos estable que el anterior.

En la figura ?? se muestra una trayectoria del sistema con una condición inicial pequeña, que de nuevo alcanza el ciclo límite pero se aprecia el mayor tiempo que tarda en conseguirlo. También podemos apreciar la menor inclinación de las rectas de corte (tanto la de salto como la de caída) con respecto a casos anteriores.

Finalmente, para terminar con este caso, podemos observar las formas de onda de las variables naturales del circuito en la figura ?. Como cabía esperar estamos en una situación similar al caso 1c dado el valor de la relación entre los autovalores en corte.

4.2.2. Caso 3

En este caso, tomamos los siguientes valores.

$$\begin{aligned}
 R_c &= 25 \Omega, \\
 R_0 &= 250 \Omega, \\
 R &= 45 K\Omega, \\
 C_c &= 20 pF, \\
 n &= 0,2, \\
 L &= 100 mH, \\
 E &= 15 V, \\
 C &= 7,8125 nF.
 \end{aligned}$$

Con estos valores, se cumplen (3.1) y (3.2). Además, de (3.3) el equilibrio en saturación está de nuevo en la región de activa, y será un nodo estable. Por otro lado podemos ver los valores de algunos parámetros importantes.

$$\begin{aligned}
 r &= 0,1, \\
 r' &= 5,1, \\
 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= 1,034 \simeq 1.
 \end{aligned}$$

Luego nos encontramos en un caso similar al 1a. En la figura ?? podemos ver la gráfica de la aplicación de Poincaré. Al ser de nuevo Γ_3 relativamente pequeña nos encontramos de nuevo una parte constante, pero al no ser tan pequeña el ciclo límite se produce después de esta zona, con lo que es mucho menos estable.

En la figura ?? se muestra una trayectoria del sistema con una condición inicial pequeña en saturación, que conduce a valores altos de tensión en corte como cabía esperar, aunque de nuevo se alcanza el ciclo límite tras un cierto número de oscilaciones.

Finalmente, podemos observar las formas de onda de las variables naturales del circuito en la figura ?. En este caso nos encontramos una onda de tensión perfectamente rectangular.

4.3. Comportamiento no oscilatorio del OB

Finalmente pasamos a describir una situación en la que el equilibrio de saturación se encuentra en la zona de saturación y por lo tanto es posible

esperar un comportamiento no oscilatorio.

Los valores de los parámetros del circuito en este caso son los siguientes.

$$\begin{aligned}
 R_c &= R_0 = 1 \text{ K}\Omega, \\
 R &= 45 \text{ K}\Omega, \\
 C_c &= 20 \text{ pF}, \\
 n &= 0,1, \\
 L &= 100 \text{ mH}, \\
 E &= 7 \text{ V}, \\
 C &= 781,25 \text{ pF}.
 \end{aligned}$$

Estos valores son los mismos que los del caso 1a pero hemos disminuido R de $64 \text{ K}\Omega$ a $45 \text{ K}\Omega$, con lo que la condición (3.3) nos permite ver que el equilibrio de saturación se encuentra en la región de saturación. Por otro lado, con estos valores, se cumplen (3.1) y (3.2). Además, el equilibrio de saturación será un nodo estable.

En la figura ?? podemos observar la gráfica de la aplicación de Poincaré para este caso. Podemos observar que para valores pequeños de la tensión, no existe la aplicación puesto que las trayectorias son atrapadas por el equilibrio de saturación, mientras que para valores grandes existe una oscilación que acaba siendo atrapada también por el equilibrio, con lo que no existe ciclo límite en este caso.

En la figura ?? podemos observar una trayectoria del sistema partiendo de una condición inicial grande, cuyo comportamiento es el previsto. Aunque aparentemente se llega a un ciclo límite realmente se realizan cinco oscilaciones y el sistema llega al equilibrio.

Esto se ve claramente en las formas de onda de las variables naturales del sistema que parten de una condición inicial grande, como podemos ver en la figura ??.

Capítulo 5

Comparación con PSPICE

Para finalizar el apartado de simulación, se han realizado simulaciones con el programa PSPICE, uno de los programas más usado para el análisis y síntesis de circuitos electrónicos.

Como ya se mencionó en la parte de simulación, existen muchos modelos complejos para el transistor bipolar (y para cualquier otro componente). Concretamente, en PSPICE se pueden encontrar modelos del tipo Ebers-Moll, Gummel-Poon, etc... considerando además diversos efectos no lineales, como el efecto Early (para más detalles ver [2]). Así por ejemplo no es necesario introducir el condensador C_c puesto que los efectos capacitivos parásitos incluidos en los modelos de transistor bipolar que maneja el programa son suficientes para reproducir el comportamiento de este condensador.

Los resultados obtenidos con este simulador, por lo tanto, son bastante fiables, si bien es necesario tener cuidado pues pueden obtenerse resultados erróneos si el programa es usado sin adecuados conocimientos de su manejo y de los modelos que emplea, y pueden obtenerse resultados estables de circuitos inestables y viceversa (ver [9]).

Comparando los resultados obtenidos del programa con los obtenidos por simulación numérica directa se llega a la conclusión de que debido a las posibles inexactitudes del modelo lineal a trozos para representar el comportamiento real del transistor bipolar, no todas las configuraciones de parámetros con las que podemos esperar que el OB oscile representarán circuitos con una solución real oscilatoria.

Se han realizado dos simulaciones en las que existe oscilación en las formas de onda en la salida del PSPICE.

En la primera de ellas, con los valores del caso 1c, se ha empleado el

circuito que se puede ver en la figura ??.

Las formas de onda obtenidas se pueden ver en las figuras ??, ?? y ??.

Podemos ver una similitud cualitativa muy grande con los resultados obtenidos y respecto a los valores numéricos encontramos una discrepancia del orden del 20 %, con lo cual podemos decir que es una buena aproximación.

En la segunda simulación se han empleado los valores del caso 3 y el circuito se puede ver en la figura ??. Las formas de onda obtenidas de la simulación se pueden ver en las figuras ??, ?? y ??.

En este caso la similitud es cualitativa y cuantitativa, del orden hasta del 1 % incluso en los períodos en corte y saturación. Por lo tanto para este caso podemos concluir que el modelo es excelente.

Parte IV

Programas para el análisis numérico del OB

Para la simulación numérica del OB se ha empleado MATLAB como entorno de programación, dada la simplicidad de su lenguaje y su especial facilidad para trabajar con matrices.

Como el modelo del OB es lineal a trozos, el sistema de ecuaciones diferenciales que lo modela es lineal, por lo que su resolución es exacta y se pueden simular las trayectorias con precisión.

Los objetivos de la simulación numérica serán, por un lado, comprobar la exactitud de la hipótesis de relajación comparando la solución exacta sin aplicar esta hipótesis y la solución aplicándola. También se dibujarán en proyección sobre el plano (u, y) trayectorias del sistema para diferentes valores iniciales, puntos de equilibrio, las rectas de caída, y las trazas de los planos que separan las diferentes regiones. Además se construirá una aplicación de Poincaré y se dibujará su gráfica.

Capítulo 6

Metodología de programación

Se ha preferido un enfoque básico, programando a un nivel simple, en vez de emplear funciones más avanzadas de MATLAB para así tener más control.

No obstante, también se han usado algunas de estas funciones avanzadas con el objeto de cotejar los resultados obtenidos con los de los otros programas.

A continuación se explican algunas de las técnicas que se emplearon en la programación.

6.1. Eliminación de ecuaciones

Cuando tenemos una ecuación del tipo:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = 0$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Y conocemos algún tipo de relación adicional entre las variables, como puede ser:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{x} + c = 0$$

donde:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$$

podemos eliminar una de ellas de la anterior ecuación. Por ejemplo, para fijar ideas, si queremos eliminar x_m , podemos hacerlo con la única condición de que $d_k \neq 0$. Entonces:

$$x_m = \frac{-1}{d_m} (c + \tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{x}')$$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{m-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix}$$

Y ahora introducimos este valor en la primera ecuación. Llamando \mathbf{e} a la columna m -ésima de \mathbf{A} , y $\tilde{\mathbf{A}}$ a la matriz \mathbf{A} eliminándole la columna m -ésima:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}' + \mathbf{e} \left[\frac{-1}{d_m} (c + \tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{x}') \right] + \mathbf{b} = 0$$

$$\left(\tilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{d_m} \mathbf{e} \tilde{\mathbf{d}}^T \right) \mathbf{x}' + \left(\mathbf{b} - \frac{c}{d_m} \mathbf{e} \right) = 0$$

Que escrito en forma más compacta queda:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' + \mathbf{b}' = 0$$

Siendo:

$$\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}} - \frac{1}{d_m} \mathbf{e} \tilde{\mathbf{d}}^T$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \frac{c}{d_m} \mathbf{e}$$

Esta sustitución la emplearemos con frecuencia a lo largo de los programas que se explicarán más adelante. Con MATLAB es muy simple crear estas nuevas matrices y vectores a partir de los anteriores ya que es un entorno pensado para este tipo de objetos. Se usa la notación de dos puntos que está diseñada para este tipo de manipulaciones.

La realización de este tipo de sustitución programada en MATLAB sería:

- Partimos de A,B,C,D tal como se han definido más arriba, con su correspondiente dimensión.
- Calculamos A1 (que es $\tilde{\mathbf{A}}$), D1 (que es $\tilde{\mathbf{d}}$) y E de la sustitución de la siguiente manera:

```
A1=A(:,1:(m-1))
D1=D(1:(m-1))
E=A(:,m)
```

Calculamos AP, BP (que son \mathbf{A}' y \mathbf{b}') :

```
AP=A1-(1/D(m))*(E*D1')
BP=B-(C/D(m))*E
```

6.2. Resolución de sistemas de e.d.o. lineales

En la simulación del OB nos encontramos con sistemas ordinarios lineales de tercer orden, pero gracias a la aplicación de la hipótesis de relajación los reducimos a sistemas de segundo orden. Por lo tanto nos ocuparemos de la resolución de este tipo de sistemas, de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Una solución particular de la ecuación es siempre:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

ya que representa a los equilibrios del sistema.

Solucionemos ahora la ecuación homogénea. La solución completa será la suma de la anterior solución y la de la homogénea.

Según sean los autovalores de la matriz \mathbf{A} , las soluciones del sistema serán de distinto tipo. Así, si definimos:

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ autovalores de } \mathbf{A}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} \mathbf{v}_1 \text{ autovector asociado a } \lambda_1 \\ \mathbf{v}_2 \text{ autovector asociado a } \lambda_2 \end{cases}$$

podemos clasificar las soluciones del sistema:

- Si los autovalores son reales y distintos, entonces los autovectores asociados son reales y linealmente independientes. La solución del sistema homogéneo la podemos escribir entonces en forma matricial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{k}.$$

Sumándole la solución particular queda la solución general de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

donde \mathbf{V} es la matriz de autovectores anteriormente comentada, y las otras matrices son:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \text{ vector de constantes (a determinar).}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \text{ matriz dependiente de } t.$$

Como la función *eig* de MATLAB nos devuelve la matriz de autovectores y una matriz diagonal con los autovalores, estas matrices son inmediatas de calcular.

Partiendo de $\mathbf{x}(0)$ calculamos el vector \mathbf{k} :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{V}\mathbf{T}(0)\mathbf{k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{V}\mathbf{k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

$$\parallel$$

$$\mathbf{I}$$

que nos dice que

$$\mathbf{k} = \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}).$$

Por lo tanto, en este caso la solución se expresa como sigue

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{k} = \mathbf{V}\mathbf{T}\mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

- Si los autovalores son complejos, entonces son complejos conjugados (y también lo son los autovectores).

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega$$

$$\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v} \pm i\mathbf{w}$$

Donde δ y ω son parámetros reales, y \mathbf{v} , \mathbf{w} son vectores de coordenadas reales.

Entonces, definiendo las siguientes matrices:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \text{ vector de constantes,}$$

$$\mathbf{T} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ -\text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \text{ matriz dependiente de } t,$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v} \ \mathbf{w}),$$

la solución es la misma que en el caso anterior:

$$\mathbf{x} = \mathbf{VTk} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Y como antes, si conocemos $\mathbf{x}(0)$, como de nuevo $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$, se tiene:

$$\mathbf{x} = \mathbf{VTk} = \mathbf{VTV}^{-1} \cdot (\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

- Si los autovalores son reales e iguales (autovalor doble), y existen dos autovectores linealmente independientes, entonces nos encontramos en el caso en que todas las direcciones son principales, es decir, cualquier vector es autovector.

Es fácil ver que para que esto ocurra la matriz del sistema debe ser diagonal.

En tal caso podemos tomar $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ y la solución será de la forma:

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{k},$$

donde, como antes,

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \text{ vector de constantes.}$$

Al sumar la solución particular se obtiene la solución general

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{k} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

y si conocemos $\mathbf{x}(0)$, se tiene:

$$\mathbf{k} = \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

y, por tanto,

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}(\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

- Finalmente, puede ocurrir que haya un autovalor doble pero exista sólo un autovector linealmente independiente (es decir, la multiplicidad geométrica del autovalor es uno). Es preciso entonces hallar un autovector generalizado para construir la matriz V pero no detallaremos su cálculo al ser un caso que de hecho no nos ha aparecido.

Por lo tanto, en cualquier caso se tiene la solución del sistema, si bien hay que detectar cual de los casos es el que se tiene para diferenciar el cálculo de la trayectoria. La manera más fácil es realizar una llamada a la función *eig* de MATLAB, que nos devuelve la matriz de autovectores y una matriz diagonal con los autovalores. Con esta última matriz ya podemos clasificar el sistema en uno de los cuatro casos anteriores.

Si conocemos $\mathbf{x}(0)$ que será normalmente nuestro caso, tendremos que calcular solamente tres matrices, dos de ellas constantes y otra variable que habrá que recalcular en cada instante y depende del caso. Así, si definimos

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{p} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},\end{aligned}$$

y \mathbf{T} es la matriz variable cuya estructura depende de cada caso como ya hemos visto, se tiene que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{s} + \mathbf{p}.$$

MATLAB permite otra alternativa, que es emplear la matriz exponencial, lo que evita clasificar el sistema o preocuparnos de autovectores o autovalores (de todos modos, lo anterior es útil para conocer el comportamiento del sistema). Así, la expresión $e^{\mathbf{A}t}$ siempre nos da la solución del sistema para cualquiera de los casos. Entonces, escribiríamos:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{s} + \mathbf{p}.$$

Capítulo 7

Estructura de programación

Se han empleado archivos de instrucciones, tanto para introducir los datos iniciales como para las tareas principales, y archivos de funciones para las subrutinas.

Los archivos empleados son:

- *datos.m*: en este archivo simplemente se introducen los datos iniciales, para simplificar su posterior simplificación.
- *matrices.m*: partiendo del anterior archivo se calculan las matrices del sistema en cada región.
- *eqauto.m*: se calculan los equilibrios, autovalores y autovectores del sistema.
- *elim.m*: aplicando la hipótesis de relajación se calculan unas nuevas matrices del sistema (eliminando una variable o dos según la zona) y sus equilibrios, autovalores y autovectores.
- *comp.m*: este archivo imprime los equilibrios, autovalores y autovectores del sistema con y sin hipótesis de relajación para su comprobación numérica.
- *rectas.m*: este archivo dibuja las rectas y trazas de planos a las que se hacen referencia en la primera sección, y también los puntos de equilibrio y direcciones de los autovectores, todo ello en proyección sobre el plano (u, y) .

- *evolucion.m*: es el archivo encargado de calcular la evolución del sistema dadas unas condiciones iniciales.
- *trayect.m*: emplea el anterior archivo para dibujar trayectorias del sistema.
- *cambio.m*: se usará para calcular el punto exacto en el que la trayectoria cambia de región del espacio (cambiando las ecuaciones).
- *poincare.m*: dibuja la gráfica de la aplicación de Poincaré de la recta de caída en corte en sí misma.
- *gamma1.m*: dibuja la gráfica de la aplicación de Poincaré de la recta de caída en corte en la recta de salto de corte.
- *gamma2.m*: dibuja la gráfica de la aplicación de Poincaré de la recta de caída en saturación en la recta de salto de saturación.
- *puntot.m*: archivo similar a *evolucion.m* pero que no conserva ningún tipo de información sobre la trayectoria seguida. A partir de un punto inicial, calcula la intersección de la órbita que nace en dicho punto con una recta.
- *resolver.m*: resuelve numéricamente el sistema sin aplicar la hipótesis de relajación, empleando el integrador de MATLAB *ode15s*.
- *blocking.m*: es una función de los parámetros y el estado que devuelve las ecuaciones que definen el sistema, para su uso por *resolver.m*.

Cada programa está adecuadamente documentado para facilitar su legibilidad y posterior modificación o adaptación.

A continuación se explica cada uno de estos programas en detalle y se adjunta su listado.

7.1. datos.m

En este archivo simplemente introducimos los datos fundamentales (parámetros) de nuestro problema. Es importante tenerlo aparte para poder modificar estos datos en cualquier momento.

El listado del programa, con unos datos dados, sería:

```

%Programa datos.m
%Datos para el OB
RC=100;
RB=100;
R=10e3;
RSAT=5;
E=7;
VG=0.65;
BETA=50;
N=0.1;
%Introducimos R0 como una admitancia para poder usar el valor
%cero en ella.
G0=0.01;
LC=0.2;
C=0.1e-6;
CC=20e-12;

```

7.2. matrices.m

El objetivo de este programa es calcular los coeficientes del sistema antes de aplicar la hipótesis de relajación, en cualquiera de las tres zonas.

El sistema se pondrá en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

donde el vector de variables de estado \mathbf{x} es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La forma de las ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 R_c C_c \dot{u} &= z - \frac{R_c}{R_o} u - R_c i_c(u, g(w)) + n R_c i_b(g(w)), \\
 \dot{y} &= \frac{1}{RC} (E - y - nz - R i_b(g(w))) - \frac{n R_c}{L} (E - z - n R_c i_b(g(w)) - u), \\
 \frac{L}{R_c} \dot{z} &= E - z - n R_c i_b(g(w)) - u,
 \end{aligned}$$

y se tiene en cuenta que $w = nE - nu + y$.

Separando estas ecuaciones en parte constante, dependencias de u , y , z , y dependencia de intensidades se tiene:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A1x} + \mathbf{b1} + \mathbf{A2i}$$

Donde los valores de las matrices son (introduciendo las constantes de tiempo):

$$\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} -\frac{R_c}{R_o\tau_c} & 0 & \frac{1}{\tau_c} \\ \frac{n}{\tau_l} & \frac{-1}{\tau} & n\left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau}\right) \\ -\frac{1}{\tau_l} & 0 & -\frac{1}{\tau_l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b1} = \begin{pmatrix} 0 \\ E\left(\frac{1}{\tau} - \frac{n}{\tau_l}\right) \\ \frac{E}{\tau_l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_b \\ i_c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A2} = \begin{pmatrix} \frac{nR_c}{\tau_c} & \frac{-R_c}{\tau_c} \\ -\frac{R}{\tau} + \frac{n^2R_c}{\tau_l} & 0 \\ \frac{-nR_c}{\tau_l} & 0 \end{pmatrix}.$$

A su vez, hay que tener en cuenta que podemos expresar \mathbf{i} en función de las otras variables y de la zona donde estemos. Así:

$$\mathbf{i} = \mathbf{A3x} + \mathbf{b2},$$

donde las matrices son, introduciendo $R' = R_b + n^2 R_c$,

$$\begin{array}{l}
 \text{corte} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ac3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{bc2} = \mathbf{0} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{activa} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Aa3} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{R'} & \frac{1}{R'} & 0 \\ -\frac{\beta n}{R'} & \frac{\beta}{R'} & 0 \\ \frac{nE - V_\gamma}{R'} \end{pmatrix} \\ \mathbf{ba2} = \begin{pmatrix} \frac{nE - V_\gamma}{R'} \\ \beta \frac{nE - V_\gamma}{R'} \end{pmatrix} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{saturación} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{As3} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{R'} & \frac{1}{R'} & 0 \\ \frac{1}{R_{\text{sat}}} & 0 & 0 \\ \frac{nE - V_\gamma}{R'} \end{pmatrix} \\ \mathbf{bs2} = \begin{pmatrix} \frac{nE - V_\gamma}{R'} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Luego las matrices buscadas son (por zonas):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Ac} &= \mathbf{A1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{Ac3} \\
 \mathbf{bc} &= \mathbf{b1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{bc2} \\
 \mathbf{Aa} &= \mathbf{A1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{Aa3} \\
 \mathbf{ba} &= \mathbf{b1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{ba2} \\
 \mathbf{As} &= \mathbf{A1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{As3} \\
 \mathbf{bs} &= \mathbf{b1} + \mathbf{A2} \cdot \mathbf{bs2}
 \end{aligned}$$

El listado del programa que realiza esto es el siguiente:

```

%Para calcular las matrices del sistema+
%en los tres casos.
%Ac,Aa,As son las respectivas matrices en corte,activa
%y saturacion.bc,ba,bs los vectores independientes.

```

```

A1=[-G0/CC 0 1/(RC*CC);n*(RC/LC) -1/(R*C) n*((RC/LC)-1/(R*C));
-(RC/LC) 0 -(RC/LC)];
b1=[0; E(1/((R*C)-n*(RC/LC)) ; E*(RC/LC)];
A2=[N/CC -1/CC ;(-1/C+(n^2)*(RC^2)/LC 0;-n*(RC^2)/LC 0];
RP=RB+N^2*RC;
Aa3=[-n/RP 1/RP 0;-BETA*n/RP -BETA/RP 0];
ba2=[(n*E-VG)/RP BETA*(n*E-VG)];
As3=[-n/RP 1/RP 0;1/RSAT 0 0];
bs2=[(n*E-VG)/RP 0];
Ac=A1;
bc=b1;
Aa=A1+A2*Aa3;
ba=b1+A2*ba2;
As=A1+A2*As3;
bs=b1+A2*bs2;

```

7.3. eqauto.m

En este programa se procede a calcular los equilibrios del sistema, autovalores y autovectores, para su posterior comparación con estos mismos valores aplicando la hipótesis de relajación.

Podemos invertir **A** puesto que en la sección donde se analizaron las ecuaciones se obtuvo una expresión de los equilibrios, que eran únicos, lo cual implica la existencia de la inversa de la matriz del sistema.

El listado del programa es el siguiente:

```

%Este programa calcula los puntos de equilibrio
%y los autovalores y autovectores en las distintas zonas.
[Vc,Lc]=eig(Ac);
[Va,La]=eig(Aa);
[Vs,Ls]=eig(As);
X0c=Ac\(-bc);
X0a=Aa\(-ba);
X0s=As\(-bs);

```

7.4. elim.m

Este programa tiene como misión fundamental aplicar la hipótesis de relajación a nuestro sistema, eliminando una variable. Primero se elimina la variable u para obtener unas matrices del sistema en (y, z) , pero luego sustituimos z para proyectar el sistema en el plano (u, y) . Para todo esto se sigue la metodología expuesta en la sección “Eliminación de variables en ecuaciones matriciales”.

La relación que nos permite eliminar una variable es un plano que denominamos plano lento, cuya ecuación será de la forma

$$au + by + cz + d = 0,$$

y que almacenaremos en un vector de la forma:

$$\mathbf{P}_L \hat{\mathbf{x}} = 0,$$

donde

$$\mathbf{P}_L = (a \ b \ c \ d),$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La sustitución de z para proyectar el sistema en el plano (u, y) es algo más compleja pues tenemos que calcular \dot{u} , pero básicamente lo que hacemos es aplicando los métodos anteriores, calcular:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} + b$$

De la ecuación del plano lento obtenemos por derivación una expresión del tipo:

$$\dot{u} = (a \ b) \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si dividimos A en filas:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_2 \end{pmatrix},$$

podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} + b',$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} A_3 \\ \dots \\ A_1 \end{pmatrix}, \\ b' &= \begin{pmatrix} c \\ b'_1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= (a \ b) A, \\ c &= (a \ b) b. \end{aligned}$$

En la sección donde se analizaron las ecuaciones se vio que estas operaciones son siempre legítimas al no ser cero los coeficientes por los que estamos dividiendo.

Además obtenemos los autovalores y autovectores para este último caso, y obtenemos también los puntos de equilibrio.

El listado del programa será el siguiente:

```
%elim.m
%Eliminacion de la variable u, primeramente
%La relacion dx+c=0 es la primera fila de A y el primer elemento de b.
%corte
d=Ac(1,:);
c=bc(1);
A1=Ac([2,3],[2,3]);
b1=bc([2,3]);
e=Ac([2,3],1);
d1=d([2,3]);
APc=A1-(1/d(1))*(e*d1);
bpc=b1-(1/d(1))*e*c;
%Ecuacion del plano lento de corte
PLc=[d c];
%saturacion
d=As(1,:);
c=bs(1);
A1=As([2,3],[2,3]);
```



```

b1=bs([2,3]);
e=As([2,3],1);
d1=d([2,3]);
APs=A1-(1/d(1))*e*d1;
bps=b1-(1/d(1))*e*c;
%Ecuacion del plano lento de saturacion
PLs=[d c];
%Obtencion de las ecuaciones en (u,y).
%Para ello, primero hacemos lo mismo que antes pero eliminamos z con
%la ecuacion del plano lento.
%Corte.
d=Ac(1,:);
c=bc(1);
A1=Ac([2,3],[1,2]);
b1=bc([2,3]);
e=Ac([2,3],3);
d1=d([1,2]);
APPc=A1-(1/d(3))*e*d1;
BPPc=b1-(1/d(3))*e*c;
%Ahora tenemos que calcular la derivada de u en base a la de z e y.
%Siguiendo los pasos explicados en la memoria.
A1=APPc(1,:);
RR=(-1/PLc(1))*PLc([2,3]); %Relacion que liga las derivadas
%de la forma du=r*(dy dz)'
Ahc=[RR*APPc;A1];
bhc=[RR*BPPc;BPPc(1)];
%Repetimos con saturacion
d=As(1,:);
c=bs(1);
A1=As([2,3],[1,2]);
b1=bs([2,3]);
e=As([2,3],3);
d1=d([1,2]);
APPs=A1-(1/d(3))*e*d1;
BPPs=b1-(1/d(3))*e*c;
A1=APPs(1,:);
RR=(-1/PLs(1))*PLs([2,3]);
Ahs=[RR*APPs;A1];

```

```

bhs=[RR*BPPs;BPPs(1)];
%Luego entonces tenemos las matrices Ap y bp que nos dan el sistema en las
%variables (y,z) y las matrices Ah,bh que nos dan el sistema en las
%variables (u,y), que son las que usaremos para el calculo.
%Calculo de autovalores, autovectores y equilibrios para corte y saturacion
%para el sistema en ambas variables.
[Vpc,Lpc]=eig(APc);
[Vps,Lps]=eig(APS);
X0pc=APc\(-bpc);
X0ps=APS\(-bps);
[Vhc,Lhc]=eig(Ahc);
[Vhs,Lhs]=eig(Ahs);
X0hc=Ahc\(-bhc);
X0hs=Ahs\(-bhs);

```

7.5. comp.m

El único objetivo de este programa es imprimir en pantalla los autovalores, autovectores y equilibrios en las distintas zonas con y sin hipótesis de relajación para su comparación numérica.

El listado del programa es el siguiente:

```

%comp.m
datos;
matrices;
eqauto;
elim;
disp ('comparacion del sistema con y sin hipotesis de relajacion
disp ('CORTE');
disp ('sin hipotesis de relajacion');
Vc,Lc,X0c
disp ('con hipotesis de relajacion');
Vpc,Lpc,X0pc
disp ('SATURACION');
disp ('sin hipotesis de relajacion');
Vs,Ls,X0s
disp ('con hipotesis de relajacion');

```

Vps,Lps,XOps

7.6. rectas.m

Este programa dibuja las rectas y trazas de planos a las que se hacen referencia en la primera sección, y también los puntos de equilibrio y direcciones de los autovectores, todo ello en proyección sobre el plano (u, y) .

```

datos;
matrices;
eqauto;
elim;
%Calculo de los planos limite.
%El formato es 0=(a b c d)*(1 u y z)'
PLca=[(N*E-VG) -N 1 0]
KU=(BETA*N*RSAT+RB+N^2*RC)/(BETA*RSAT);
PLas=[(N*E-VG) -KU 1 0]
%Representacion en los ejes z,u
y=[-1 E];
u1=-1/PLca(2) * (PLca(1)+PLca(3)* y);
u2=-1/PLas(2) * (PLas(1)+PLas(3)* y);
plot (y,u1,'r',y,u2,'g')
hold on
%Representacion de los puntos de equilibrio
plot (XOc(2),XOc(1),'+',XOa(2),XOa(1),'*',XOs(2),XOs(1),'x')
%Representacion de las rectas de los autovectores
%de corte y saturacion.
%autovectores de corte con la hipotesis de relajacion
[V,L]=eig(Ahc);
yc1(1)=XOhc(2);
uc1(1)=XOhc(1);
if V(1,1)~=0
    l=10*(E-uc1(1))/V(1,1);
else
    l=10*(E-yc1(1))/V(2,1);
end

```

```

yc1(2)=yc1(1)+l*V(2,1);
uc1(2)=uc1(1)+l*V(1,1);
yc1(1)=yc1(2)-2*l*V(2,1);
uc1(1)=uc1(2)-2*l*V(1,1);
yc2(1)=X0hc(2);
uc2(1)=X0hc(1);
if V(1,2)~=0
    l=(10*E-uc2(1))/V(1,2);
else
    l=(10*E-yc2(1))/V(2,2);
end
yc2(2)=yc2(1)+l*V(2,2);
uc2(2)=uc2(1)+l*V(1,2);
yc2(1)=yc2(2)-2*l*V(2,2);
uc2(1)=uc2(2)-2*l*V(1,2);
%autovectores de saturacion
[V,L]=eig(Ahs);
ys1(1)=X0hs(2);
us1(1)=X0hs(1);
if V(1,1)~=0
    l=(10*E-us1(1))/V(1,1);
else
    l=(10*E-ys1(1))/V(2,1);
end
ys1(2)=ys1(1)+l*V(2,1);
us1(2)=us1(1)+l*V(1,1);
ys2(1)=X0hs(2);
us2(1)=X0hs(1);
ys1(1)=ys1(2)-2*l*V(2,1);
us1(1)=us1(2)-2*l*V(1,1);
if V(1,2)~=0
    l=(10*E-us2(1))/V(1,2);
else
    l=(10*E-ys2(1))/V(2,2);
end
ys2(2)=ys2(1)+l*V(2,2);
us2(2)=us2(1)+l*V(1,2);
ys2(1)=ys2(2)-2*l*V(2,2);

```

```

us2(1)=us2(2)-2*1*V(1,2);
%rectas de caida
r=RC*G0;
rp=RC*((1/RSAT)+G0);
alfac=N*RC/(RB+(N^2)*RC);
k=N/KU;
ycc(1)=-1;
ycc(2)=E;
ucc=((ycc-VG)/N+E)*(k*(rp+N*alfac)-N*alfac)/r;
ycc(1)=-1;
ycc(2)=E;
ucs=((ycc-VG)/N+E)*(r+N*alfac)/(rp+N*alfac);
%dibujar todo
plot (yc1,uc1,'y',yc2,uc2,'y',ys1,us1,'m',ys2,us2,'m');
plot (ycc,ucc,'b',ycc,ucs,'c');
hold off;
axis on;
axis([-1,E,-1,E])
hold off

```

7.7. evolucion.m

Este programa tiene la misión de calcular el estado del sistema en función del tiempo, dadas unas condiciones iniciales, las matrices del sistema en dicha zona, y los límites de la región donde se mueve el sistema.

Como establecimos en apartados anteriores, al ser el sistema lineal a trozos, podemos obtener la solución exacta en cada uno de estos tramos, es decir, el sistema lo tenemos integrado y sólo necesitamos aplicar valores del tiempo a las fórmulas de la solución, y conocer cuando se produce el cambio de región.

El programa devolverá para cada variable un vector con todos los estados por los que ha pasado, y se parará cuando las variables salgan de la correspondiente región o cuando el sistema alcance un equilibrio estable.

Será una función que podrá ser llamada por otros programas.

```
%funcion evolucion.m
```

```

%A partir de las matrices del sistema, de su forma canonica de
%Jordan, de una escala de tiempo, de una condicion de
%finalizacion y de una condicion inicial, se devuelve un
%vector con los puntos por los que pasa la trayectoria
%y una bandera que informa de si la orbita ha llegado a
%la condicion final o ha sido atrapado por un equilibrio.
function [u,y,t,equ]=evolucion (A,b,x0,cond,escala)
i=1;
equ=0;%bandera que informara del comportamiento final.
%asignacion de condiciones iniciales.
x=x0;
u=x0(1);
y=x0(2);
t=0;
%segun la clase del sistema usamos las distintas formulas
%analiticas de la solucion.
R1=A\b;
R2=(x0+R1);
while cond*[x;1]<=0
    i=i+1;
    t(i)=escala*i;
    x=expm(A*t(i))*R2-R1;
    u(i)=x(1);
    y(i)=x(2);
    if i>10 %control de que el sistema no ha sido atrapado
        %por un equilibrio estable.
        if u(i)==u(i-10) & y(i)==y(i-10)
            equ=1;
            break
        end
    end
end
end
end

```

7.8. trayect.m

Este es el programa que se encargará de dibujar trayectorias desde una determinada posición inicial que se puede cambiar variando las primeras líneas.

Hace uso de la función *evolucion* y de la función *cambio*, y además tiene en cuenta el salto entre zonas al que no se le asigna ningún tiempo de duración, suponiéndose instantáneo.

```
%programa trayect.m
%Representa un determinado numero de orbitas a partir de una cierta
%condicion inicial.
%Tambien es capaz de detectar si se la trayectoria es atrapada por un
%equilibrio.
datos;
matrices;
eqauto;
elim;
m=2%este parametro determina la precision
%Calculo de los planos limite.
%El formato es 0=(a b c)*(u y 1)
PLca=[-N 1 (N*E-VG)];
KU=(BETA*N*RSAT+RB+N^2*RC)/(BETA*RSAT);
PLas=[-KU 1 (N*E-VG)];
x0=[10;0];%condicion inicial
if PLca*[x0;1]<=0
    corte=1;%valor que nos permite decidir si el sistema empieza en corte
    %o en saturacion.Suponemos que la condicion inicial no esta en activa.
else
    corte=0;
end
uu=[];
yy=[];
tope=10;%numero de oscilaciones que pretendemos que se den.
vueltas=0;
tt=[];
while vueltas<tope
    if corte ==1
```

```

cond=PLca;
%la escala de tiempo se elige como el inverso del autovalor mas grande
%multiplicado por un valor que elegimos nosotros
escala=1/abs(Lhc(1,1)*5*m);
if escala>1/abs(Lhc(2,2)*5*m)
    escala=1/abs(Lhc(2,2)*5*m);
end
[u,y,t,eq]=evolucion1 (Ahc,bhc,x0,cond,escala);
if eq==1 %la trayectoria ha sido atrapada por un equilibrio.
    %construccion de los vectores de datos y de la informacion
    %temporal
    long=length(u);
    uu=[uu;u'];
    yy=[yy;y'];
    ind=length (tt);
    if ind~=0
        t=t+tt(ind);
    end
    tt=[tt;t];
    break
end
long=length(u);
%llamada al programa cambio para afinar el punto de salida.
[u(long),y(long),t(long)]=cambio(u(long),y(long),t(long),u(long-1),y(long-1),t(long-1));
x0=[u(long);y(long)];
%construccion de los vectores de datos y de la informacion
%temporal
uu=[uu;u'];
yy=[yy;y'];
ind=length (tt);
if ind~=0
    t=t+tt(ind);
end
tt=[tt;t'];
%Salto por activa hasta saturacion
z=-1/PLc(3)*(PLc(4)+PLc(1:2)*x0);
ufinal=-1/PLs(1)*(PLs(4)+PLs(2)*x0(2)+PLs(3)*z);
x0(1)=ufinal;

```



```

end
corte=1;
cond=-PLas;
%la escala de tiempo de saturacion se elige igual que la de corte
%pudiendo ser muy distinta de esta.
escala=1/abs(Lhs(1,1)*m);
if escala>1/abs(Lhs(2,2)*m)
    escala=1/abs(Lhs(2,2)*m);
end
[u,y,t,equ]=evolucion1 (Ahs,bhs,x0,cond,escala);
if equ==1 %trayectoria atrapada por equilibrio.
    %construccion de los vectores de datos y de la informacion
    %temporal
    long=length(u);
    uu=[uu;u'];
    yy=[yy;y'];
    ind=length (tt);
    if ind~=0
        t=t+tt(ind);
    end
    tt=[tt;t'];
    break
end
long=length(u);
%llamada al programa cambio para afinar el punto de salida.
if long~=1
    [u(long),y(long),t(long)]=cambio(u(long),y(long),t(long),u(long-1),y(long-1),t(
end
x0=[u(long);y(long)];
%construccion de los vectores de datos y de la informacion
%temporal
uu=[uu;u'];
yy=[yy;y'];
ind=length (tt);
if ind~=0
    t=t+tt(ind);
end
tt=[tt;t'];

```

```

    %Salto por activa hasta corte
    z=-1/PLs(3)*(PLs(4)+PLs(1:2)*x0);
    ufinal=-1/PLc(1)*(PLc(4)+PLc(2)*x0(2)+PLc(3)*z);
    x0(1)=ufinal;
    vueltas=vueltas+1;
end
uu=[uu;ufinal];
yy=[yy;x0(2)];
tt=[tt;t(long)];

plot (yy,uu);%presentacion de resultados.

```

```

    vueltas=vueltas+1;
end
uu=[uu;ufinal];
yy=[yy;x0(2)];
tt=[tt;t(long)];

plot (yy,uu);%presentacion de resultados.

```

7.9. cambio.m

Esta función es la encargada de afinar el punto donde el sistema cambia de región realizando una interpolación lineal entre dos puntos consecutivos que atraviesan el plano límite de la región.

```

%funcion cambio.m
%uso: [u,y,tfin]=cambio(u2,y2,t2,u1,y1,t1,cond)
%Esta funcion realiza una interpolacion lineal entre dos puntos
%en el plano dado por sus respectivas coordenadas (u2,y2) y
%(u1,y1) y calcula el punto de corte con la recta dada por la
%ecuacion cond
function [u,y,tfin]=cambio(u2,y2,t2,u1,y1,t1,cond)
if u2~=u1 & y2~=y1 %la recta de interpolacion tiene derivada

```

```

%no nula ni infinita
mu=1/(u1-u2);
my=1/(y1-y2);
A1=[-mu my];
A=[A1;cond(1:2)];
b1=y1*my-u1*mu;
b=[b1;-cond(3)];
x=A^(-1)*b;
else
  if u2==u1 %derivada nula
    x=[u2;-1/cond(2)*(cond(3)+u2*cond(1))];
  else %derivada infinita:recta vertical
    x=[-1/cond(1)*(cond(3)+y2*cond(2));y2];
  end
end
end
u=x(1);
y=x(2);
%calculo de la distancia del punto de corte a uno de los
%dos puntos relativa a la distancia entre los dos puntos
%para afinar el tiempo que se tarda en alcanzar el punto
%de corte.
if u2==u1
  tfin=(y1-y)/(y1-y2)*(t2-t1)+t1;
else
  tfin=(u1-u)/(u1-u2)*(t2-t1)+t1;
end
end

```

7.10. poincare.m

En este programa realizaremos la gráfica de la aplicación de Poincaré de la recta intersección entre el plano lento de corte y el plano límite corte-activa, es decir, de la recta de paso de corte a saturación, en sí misma.

Para ello se empleará el programa puntot.m, que no conserva la información de las órbitas ni la información temporal, sólo interesa conseguir para cada condición inicial tomada en la recta el punto de retorno a dicha recta.

Como puede haber equilibrios estables que atrapen la trayectoria y por tanto no existir para algunas (o todas) las condiciones iniciales puntos de retorno, se detectarán estas condiciones iniciales y se les asignará un punto de retorno de -5, lo que no es posible en principio en este sistema, con lo que se sabrá su condición.

```
%poincare.m
%Lanzamos condiciones iniciales en la recta de paso de
%corte a saturacion y obtenemos los puntos de retorno
%a dicha recta. El paso determina el numero de puntos.
paso=0.2;
ufin=15;%valor final de u en la recta.
uin=paso;%valor inicial de u en la recta.
ui=uin:paso:ufin;%preparacion del vector de datos iniciales.
datos;
matrices;
eqauto;
elim;
uf=0;
%Calculo de los planos limite.
%El formato es 0=(a b c)*(u y 1)
PLca=[-N 1 (N*E-VG)];
KU=(BETA*N*RSAT+RB+N^2*RC)/(BETA*RSAT);
PLas=[-KU 1 (N*E-VG)];
i=1;%contador
x0=zeros(2,1);
while i<=((ufin-uin)/paso+1)
    x0(1)=ui(i);
    x0(2)=-1/PLca(2)*(PLca(3)+PLca(1)*x0(1));
    %Salto por activa hasta saturacion
    z=-1/PLc(3)*(PLc(4)+PLc(1:2)*x0);
    ufinal=-1/PLs(1)*(PLs(4)+PLs(2)*x0(2)+PLs(3)*z);
    x0(1)=ufinal;
    cond=-PLas;
    [u,y,equ]=puntot(Ahs,bhs,x0,cond);
    if equ~=1
        x0=[u;y];
        %Salto por activa hasta corte
```

```

z=-1/PLs(3)*(PLs(4)+PLs(1:2)*x0);
ufinal=-1/PLc(1)*(PLc(4)+PLc(2)*x0(2)+PLc(3)*z);
x0(1)=ufinal;
cond=PLca;
[u,y,equ]=puntot(Ahc,bhc,x0,cond);
if equ~=1
    uf(i)=u;%la trayectoria ha retornado a la recta.
    i=i+1;
else %condicion inicial atrapada por equilibrio.
    uf(i)=-5;
    i=i+1;
end
else %condicion inicial atrapada por equilibrio.
    uf(i)=-5;
    i=i+1;
end
end
end
%presentacion de resultados.
plot (ui,uf,ui,ui);

```

7.11. gamma1.m, gamma2.m

Estos programas son similares al anterior, sólo cambian las rectas entre las cuales queremos obtener la gráfica de la aplicación de Poincaré.

7.12. puntot.m

Este archivo es similar a evolucion.m pero que no conserva ningún tipo de información sobre la trayectoria seguida. A partir de un punto inicial, calcula la intersección de la órbita que nace en dicho punto con una recta, empleando un algoritmo de bisección que se va aproximando al punto deseado hasta que se cumple una determinada tolerancia.

```

function [u,y,equ]=puntot(A,b,xi,cond)
T0=0;
T1=1e-7;

```

```

R1=A\b;
equ=0;%bandera que informara del comportamiento final.
%asignacion de condiciones iniciales.
bien=0;
paso=0;
while bien==0
    x0=expm(A*T0)*(xi+R1)-R1;
    x1=expm(A*T1)*(xi+R1)-R1;
    if (cond*[x0;1])*(cond*[x1;1])<=0
        bien=1;
    else
        paso=paso+1;
        T0=T1;
        T1=T1*10;
    end
    if paso>10
        equ=1;
        bien=1;
    end
end
x2=x1;
T2=(T0+T1)/2;
x2=expm(A*T2)*(xi+R1)-R1;
if equ==0
    while abs(cond*[x2;1])>1e-6
        if (cond*[x0;1])*(cond*[x2;1])<=0
            x1=x2;
            T1=T2;
        else
            x0=x2;
            T0=T2;
        end
    end
    T2=(T0+T1)/2;
    x2=expm(A*T2)*(xi+R1)-R1;
end
u=x2(1);
y=x2(2);
else

```

```

    u=x1(1);
    y=x1(2);
end

```

7.13. resolver.m

Este programa resuelve numéricamente el sistema sin aplicar la hipótesis de relajación, empleando el integrador de MATLAB *ode15s*.

Tenemos que usar este integrador ya que el sistema tiene unas escalas de tiempo muy diferentes, por lo que es claramente un sistema *stiff*.

El programa emplea el archivo *blocking.m* donde está definido el sistema, y una vez obtiene la solución la representa en el plano de fases (u, y).

```

%resolver.m
matrices;
elim;
%x0=[1;1;1];
x0=[1;0];
z=-1/PLc(3)*(PLc(4)+PLc(1:2)*x0);
x0=[x0;z];
TSPAN=[0 0.01];
%Calculo de los planos limite.
%El formato es 0=(a b c d)*(1 u y z)'
PLca=[-N 1 0 (N*E-VG)]
KU=(BETA*N*RSAT+RB+N^2*RC)/(BETA*RSAT);
PLas=[-KU 1 0 (N*E-VG)]
[t,x]=ode15s('blocking',TSPAN,x0,[],Ac,bc,Aa,ba,As,bs,PLca,PLas);
plot(x(:,2),x(:,1),'g');

```

7.14. blocking.m

Archivo donde está definido el sistema, para ser empleado por *resolver.m*. Necesita los parámetros (matrices) del sistema, que le son pasados por este programa.

```
%Funcion blocking F = blocking(t,x,flag,Ac,bc,Aa,ba,As,bs,PLca,PLas)
%Para resolucion numerica del oscilador.
function F = blocking(t,x,flag,Ac,bc,Aa,ba,As,bs,PLca,PLas)
if PLca*[x;1]<=0
    F=Ac*x+bc;
else
    if PLas*[x;1]>0
        F=As*x+bs;
    else
        F=Aa*x+ba;
    end
end
end
```


Bibliografía

- [1] Andronov, A., Vitt, A. & Khaikin, S. [1966] *Theory of oscillations*, Pergamon Press, Oxford. pp. 730–749.
- [2] Antognetti, P. & Massobrio G. [1993], *Semiconductor device modelling with SPICE*, McGraw Hill, New York, Chapter 2, pp. 45-75.
- [3] Bernhardt, P. A. [1991] *The autonomous chaotic relaxation oscillator: an electrical analog to the dripping faucet*, Phisica D, vol. 52, pp. 489-527.
- [4] Bernardo M., Kennedy M.P. & Maggio, G.M. [1994] *Evidence of non-smooth bifurcations in a piecewise-linear model of the Colpitts oscillator*, Proceedings of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems NDES-98
- [5] Fink, D.G. [1975] *Electronics engineer's handbook*, McGraw Hill, New York.
- [6] Freire, E., Ponce E. & Ros, J. [1998] *Limit cycle bifurcation from a center in symmetric piecewise linear systems*, I. J. Bif. & Chaos (1999)
- [7] Freire E., Ponce E., Rodrigo, F. & Torres, F. [1998] *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, I. J. Bif. & Chaos, pp. 2073-2097.
- [8] Freire E., Ponce E. & Torres F. [1996], *Hopf bifurcations in piecewise linear planar dynamical systems*, Proceedings of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems NDES-96, 129–134.
- [9] Lindberg, E. [1996], *SPICE and Chaos*, Proceedings of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems NDES-96, pp. 201-206.
- [10] Manáev E. [1985], *Fundamentos de la radioelectrónica*, Editorial Mir, Moscú, pp. 378-381.

- [11] Millmann, J. & Taub [1965], *Circuitos de pulsos, digitales y de conmutación*, McGraw Hill, New York.
- [12] El-Leithy, N. & Newcomb R. W. [1986], *Chaos generation using binary hysteresis*, Circuits Systems Signal Process, Vol.5, N° 3, 1986, pp. 321-341.
- [13] Rössler, O. E. [1979], *Continuous chaos - four prototype equations*, New York Academy of Sciences (1979), pp. 376-392.
- [14] Rul'kov, N.F. & Volkovskii, A. R. [1993] *Threshold synchronization of chaotic relaxation oscillations*, Phys. Lett. A, vol. 179, pp. 332-336.
- [15] Volkovskii, A. R. [1995], *Chaotic Blocking Oscillator*, Proceedings of Non-linear Dynamics of Electronic Systems NDES-95, pp. 263-266